Classe: *1A Liceo Scientifico* *31 marzo 2017*

Prova di Matematica: *Frazioni algebriche*

1. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} \qquad \frac{y^3-4y^2+4y}{y^3+3y^2-10y} \qquad \frac{a^{-2}}{a^2}+\frac{b^{-2}}{b^2}$$

$$\frac{a^4-16}{(a^3+6a^2+12a+8)(a^4+8a^2+16)} \qquad \frac{x^2-4x+4}{3x^2+3x-6}\cdot\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}:\left(\frac{x^2-3x+2}{3x+6}\right)^2$$

$$\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}\right)^2\cdot 25y:\frac{25x-50}{x^2-2x+xy-2y}-\frac{xy}{y^2-x^2}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$\left[\frac{1}{x+2y}-\left(x-\frac{12y^2-2x^2-2xy}{x-2y}\right)\cdot\frac{1}{x^2+4y^2+4xy}\right]:\left(\frac{6y-x}{x^2-4y^2}+\frac{1}{2y-x}\right)$$

2. L'insegnante di matematica dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale p è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante. Determina:
   a. *il punteggio massimo possibile;*
   b. *la formula che fornisce il punteggio* ***p*** *complessivo, indicando con* ***n*** *il numero di risposte esatte;*
   c. *il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza equivalente a 60 punti.* ***PROVA INVALSI 2011***

Soluzione

1. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}= \qquad\qquad C.E.:\quad x\neq y \quad \wedge \quad x\neq 0 \quad \wedge \quad y\neq 0$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\ .$$

$$\frac{y^3-4y^2+4y}{y^3+3y^2-10y}= \qquad\qquad C.E.:\ y\neq 0 \quad \wedge \quad y\neq -5 \quad \wedge \quad y\neq 2$$

$$=\frac{y\cdot(y^2-4y+4)}{y\cdot(y^2+3y-10)}=\frac{y\cdot(y-2)^2}{y\cdot(y+5)(y-2)}=\frac{y-2}{y+5}$$

$$\frac{a^{-2}}{a^2}+\frac{b^{-2}}{b^2}= \qquad\qquad C.E.:\quad a\neq 0 \quad \wedge \quad b\neq 0$$

$$=\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}=\frac{b^4+a^4}{a^4b^4}\ .$$

$$\frac{a^4-16}{(a^3+6a^2+12a+8)(a^4+8a^2+16)}= \qquad\qquad C.E.:\quad a\neq -2$$

$$=\frac{(a^2+4)(a+2)(a-2)}{(a+2)^3\cdot(a^2+4)^2}=\frac{a-2}{(a+2)^2\cdot(a^2+4)}\ .$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2+3x-6}\cdot\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}:\left(\frac{x^2-3x+2}{3x+6}\right)^2 \quad C.E.:\ x\neq \mp 2 \quad \wedge \quad x\neq\ 1$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=$$
$$=(x-1)(x-1)(x+2)$$

	1	0	−3	+2
1		+1	+1	−2
	1	+1	−2	0

$$=\frac{(x-2)^2}{3(x-1)(x+2)}\cdot\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+2)(x-2)}:\left[\frac{(x-1)(x-2)}{3(x+2)}\right]^2=$$

$$=\frac{(x-2)^2}{3(x-1)(x+2)}\cdot\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+2)(x-2)}:\frac{(x-1)^2(x-2)^2}{9(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(x-2)^2}{3(x-1)(x+2)}\cdot\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{9(x+2)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{3(x+2)}{(x-2)(x-1)}\ .$$

$$\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}\right)^2 \cdot 25y : \frac{25x-50}{x^2-2x+xy-2y} - \frac{xy}{y^2-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) =$$

$$C.E.:\ x \neq \mp y \ \wedge \ x \neq 2 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$$

$$= \left[\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}\right]^2 \cdot 25y : \frac{25(x-2)}{(x+y)(x-2)} - \frac{xy}{(y+x)(y-x)} \cdot \frac{y-x}{xy} =$$

$$= \left[\frac{1}{x+y}\right]^2 \cdot 25y : \frac{25}{x+y} - \frac{1}{x+y} =$$

$$= \frac{1}{(x+y)^2} \cdot 25y \cdot \frac{x+y}{25} - \frac{1}{x+y} =$$

$$= \frac{y}{x+y} - \frac{1}{x+y} =$$

$$= \frac{y-1}{x+y} .$$

$$\left[\frac{1}{x+2y} - \left(x - \frac{12y^2-2x^2-2xy}{x-2y}\right) \cdot \frac{1}{x^2+4y^2+4xy}\right] : \left(\frac{6y-x}{x^2-4y^2} + \frac{1}{2y-x}\right) =$$

$$C.E.:\ x \neq \mp 2y \ \wedge \ b \neq 0$$

$$= \left[\frac{1}{x+2y} - \left(\frac{x \cdot (x-2y) - 12y^2 + 2x^2 + 2xy}{x-2y}\right) \cdot \frac{1}{(x+2y)^2}\right] : \left(\frac{6y-x}{(x+2y)(x-2y)} + \frac{1}{2y-x}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{x+2y} - \left(\frac{x^2-2xy-12y^2+2x^2+2xy}{x-2y}\right) \cdot \frac{1}{(x+2y)^2}\right] : \left(\frac{6y-x}{(x+2y)(x-2y)} - \frac{1}{x-2y}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{x+2y} - \frac{3x^2-12y^2}{x-2y} \cdot \frac{1}{(x+2y)^2}\right] : \left(\frac{6y-x-(x+2y)}{(x+2y)(x-2y)}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{x+2y} - \frac{3(x+2y)(x-2y)}{x-2y} \cdot \frac{1}{(x+2y)^2}\right] : \left(\frac{6y-x-x-2y}{(x+2y)(x-2y)}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{x+2y} - \frac{3}{x+2y}\right] : \left(\frac{-2x+4y}{(x+2y)(x-2y)}\right) =$$

$$= \left[\frac{1-3}{x+2y}\right] : \left(\frac{-2(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}\right) =$$

$$= \frac{-2}{x+2y} : \frac{-2}{x+2y} \quad = \quad 1$$

L'insegnante di matematica dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale ***p*** *è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante. Determina:*

a. *il punteggio massimo possibile;*
b. *la formula che fornisce il punteggio* ***p*** *complessivo, indicando con* ***n*** *il numero di risposte esatte;*
c. *il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza equivalente a 60 punti.*

PROVA INVALSI 2011

Soluzione

Il punteggio massimo possibile è 100.

La formula che fornisce il punteggio ***p*** *complessivo è:* $P = 4n - 2(25 - n) = 6n - 50$

Il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza è 19 .

Infatti considerando la formula: $P = 6n - 50$ *si ottiene:*

$6n - 50 = 60$; $6n = 110$; $n = \frac{110}{6} = 18,\overline{3}$.