Prova di Matematica : Sistemi lineari

Alunno: ________________________________ Classe: 2B L. Scientifico

1. Determina il grado dei seguenti sistemi :

$\begin{cases} x-3y=2 \\ x-xy=3 \end{cases}$	$\begin{cases} (2x+1)^2-y=4x\cdot(1+x) \\ 6x^3+5y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x^2+x^2y^2=7 \\ x+y^2-2=0 \end{cases}$
Sistema di .... grado	Sistema di .... grado	Sistema di .... grado	Sistema di .... grado

2. Verifica se la coppia a lato è una soluzione del sistema

$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ x+3y=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} xy+y=3 \\ 6y-7x=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y=\frac{1}{4} \\ 3y-2x+1=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$
SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO

3. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con due diversi metodi:

$$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-3y-12=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-7y+3=0 \\ 7y-5x=2 \end{cases}$$

4. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y : $\begin{cases} m(2x+y)+y=2 \\ mx+2y-my=1 \end{cases}$

5. Antonio e Luca hanno due rettangoli uguali. Antonio taglia il suo rettangolo parallelamente alla base e Luca parallelamente all'altezza. Antonio ottiene due rettangoli, ciascuno con perimetro 40cm, Luca ottiene due rettangoli, ciascuno con perimetro 50cm. Qual era il perimetro dei rettangoli iniziali?

6. Di tre miscele: la prima contiene il 30% di alcol e ha un peso specifico di $800\,g/l$; la seconda contiene il 20% di alcol e ha un peso specifico di $900\,g/l$; la terza contiene il 10% di alcol e ha un peso specifico di $1100\,g/l$. In quali quantità occorre mescolarle per ottenere $10\,l$ di una nuova miscela contenente il $19,5\%$ di alcol e con un peso specifico di $935\,g/l$?

Soluzione

1. Determina il grado dei seguenti sistemi :

$\begin{cases} x-3y=2 \\ x-xy=3 \end{cases}$	$\begin{cases} (2x+1)^2-y=4x\cdot(1+x) \\ 6x^3+5y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x^2+x^2y^2=7 \\ x+y^2-2=0 \end{cases}$
Sistema di **2°** grado	Sistema di **3°** grado	Sistema di **1°** grado	Sistema di **8°** grado

2. Verifica se la coppia a lato è una soluzione del sistema

$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ x+3y=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} xy+y=3 \\ 6y-7x=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y=\frac{1}{4} \\ 3y-2x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$
SI	**NO**	**SI**	**SI**

4. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$\begin{cases} \mathbf{5x-7y+3=0} \\ \mathbf{7y-5x=2} \end{cases}$ $\quad$ *Il sistema è impossibile*

Infatti riducendo il sistema a forma normale $\quad$ $\begin{cases} 5x-7y=-3 \\ -5x+7y=2 \end{cases}$

$$\left(\frac{a}{a^I}=\frac{+5}{-5}=-1\right) = \left(\frac{b}{b^I}=\frac{-7}{+7}=-1\right) = \left(\frac{c}{c^I}=-\frac{3}{2}\right)$$

Metodo di sostituzione

$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-3y-12=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{3x+4y=1} \\ \mathbf{2x-3y=12} \end{cases}$

$\left(\frac{a}{a^I}=\frac{3}{2}\right) \neq \left(\frac{b}{b^I}=-\frac{4}{3}\right)$ $\quad$ *Sistema determinato*

$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}y \\ \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ 2\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}y\right)-3y=12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ \frac{2}{3}-\frac{8}{3}y-3y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} \ldots \\ 2-8y-9y=36 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ -17y=34 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ y=-2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\cdot(-2)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3 \\ \ldots \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

Metodo del confronto

$\begin{cases} \mathbf{3x+4y=1} \\ \mathbf{2x-3y=12} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}y \\ x=\frac{3}{2}y+6 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ \frac{1}{3}-\frac{4}{3}y=\frac{3}{2}y+6 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ 2-8y=9y+36 \end{cases}$

$\begin{cases} \ldots \\ -17y=34 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \ldots \\ y=-2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=\frac{3}{2}\cdot(-2)+6=3 \\ \ldots \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=+3 \\ y=-2 \end{cases}$

Metodo di riduzione

$\begin{matrix} 2\cdot \\ 3\cdot \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{3x+4y=1} \\ \mathbf{2x-3y=12} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 6x+8y=2 \\ 6x-9y=36 \end{cases} \begin{matrix} - \\ = \end{matrix}$

$17y=-34; \quad y=-2$

$\begin{matrix} 3\cdot \\ 4\cdot \end{matrix}\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 9x+12y=3 \\ 8x-12y=48 \end{cases} \begin{matrix} + \\ = \end{matrix}$

$17x=51; \quad x=3$ $\quad \begin{cases} x=+3 \\ y=-2 \end{cases}$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} \mathbf{3x+4y=1} \\ \mathbf{2x-3y=12} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 = -9 - 8 = -17$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 12 \cdot 4 = -3 - 48 = -51$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 1 = 36 - 2 = 34$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-51}{-17} = +3 \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{34}{-17} = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Metodo Grafico

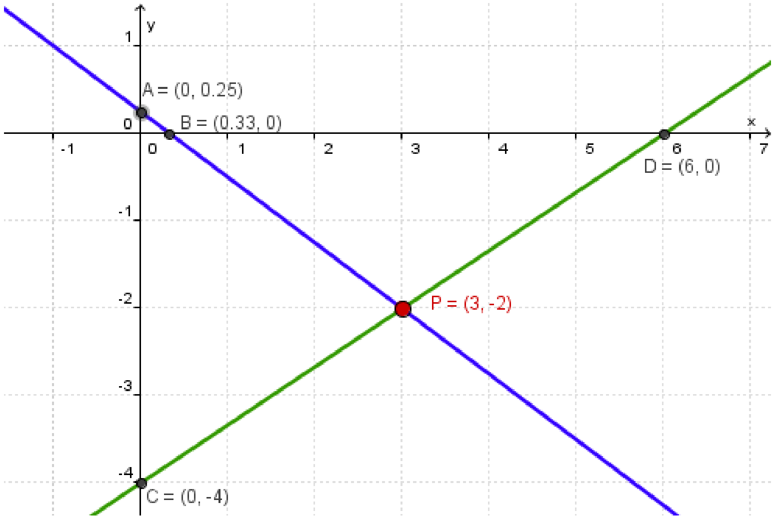
$$\begin{cases} \mathbf{3x+4y=1} \\ \mathbf{2x-3y=12} \end{cases}$$

$3x + 4y = 1$

x	y
0	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$	0

$2x - 3y = 12$

x	y
0	-4
6	0



5. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} m(2x+y)+y=2 \\ mx+2y-my=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2mx+my+y=2 \\ mx+(2-m)y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{2mx+(m+1)y=2} \\ \mathbf{mx+(2-m)y=1} \end{cases}$$

Il determinante del sistema è

$$D = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ m & 2-m \end{vmatrix} = 2m \cdot (2-m) - m \cdot (m+1) = 4m - 2m^2 - m^2 - m = 3m - 3m^2 = 3m \cdot (1-m)\,.$$

Il determinante $D_x = \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 2 \cdot (2-m) - 1 \cdot (m+1) = 4 - 2m - m - 1 = 3 - 3m = 3 \cdot (1-m)$

Il determinante $D_y = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 2m \cdot 1 - m \cdot 2 = 2m - 2m = 0$

Discussione:

$Se\ \ D = 0 \quad cioè \quad 3m \cdot (1-m) = 0 \qquad \begin{cases} m = 0 & \Rightarrow & (D_x = 3 \ \wedge \ D_y = 0) & S.impossibile \\ m = 1 & \Rightarrow & (D_x = 0 \ \wedge \ D_y = 0) & S.indeterminato \end{cases}$

$Se\ D \neq 0 \quad cioè\ \ m \neq 0 \ \wedge \ m \neq 1$ *il sistema è determinato, e la soluzione è :*

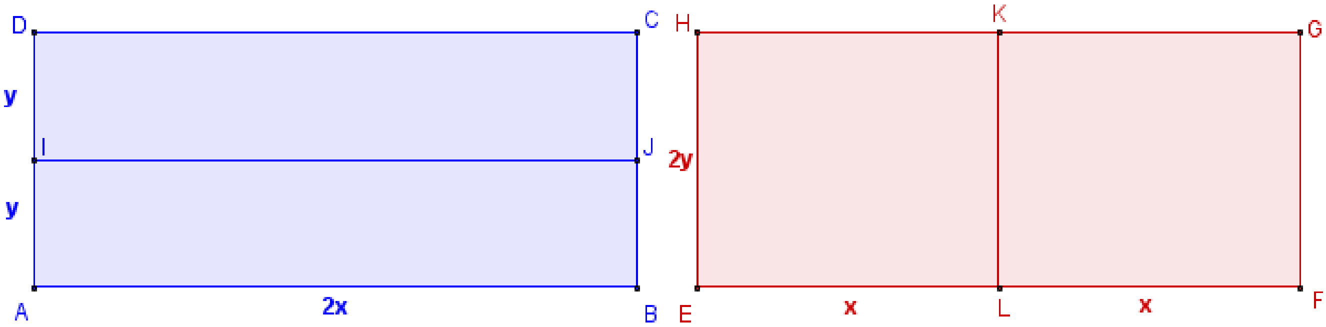
$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3 \cdot (1-m)}{3m \cdot (1-m)} = \dfrac{1}{m} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{0}{3m \cdot (1-m)} = 0 \end{cases}$$

Riassumendo si ha:

Parametro	***Tipo***	***Soluzione***
$m = 0$	*Sistema impossibile*	$\emptyset$
$m = 1$	*Sistema indeterminato*	∞
$m \neq 0 \quad \wedge \quad m \neq 1$	*Sistema determinato*	$\left(x = \dfrac{1}{m}\ ;\ y = 0\right)$

6. Antonio e Luca hanno due rettangoli uguali. Antonio taglia il suo rettangolo parallelamente alla base e Luca parallelamente all'altezza. Antonio ottiene due rettangoli, ciascuno con perimetro 40cm, Luca ottiene due rettangoli, ciascuno con perimetro 50cm. Qual era il perimetro dei rettangoli iniziali? LS2B

Soluzione



Poniamo: la base del rettangolo uguale a x e l'altezza del rettangolo uguale a y con $x, y \in R^+$.

Si ottiene:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 40 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 20 - 2x \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x + 2(20 - 2x) = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ -3x = -15 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$$

Il perimetro dei rettangoli iniziali era: $p = 2 \cdot (\overline{AB} + \overline{AD}) = 2 \cdot (10 + 20)\ cm = 60\ cm$.

7. Di tre miscele: la prima contiene il 30% di alcol e ha un peso specifico di $800\ g/l$; la seconda contiene il 20% di alcol e ha un peso specifico di $900\ g/l$; la terza contiene il 10% di alcol e ha un peso specifico di $1100\ g/l$. In quali quantità occorre mescolarle per ottenere $10\ l$ di una nuova miscela contenente il $19,5\%$ di alcol e con un peso specifico di $935\ g/l$?

Soluzione

Poniamo: la quantità della prima miscela $= x$;
la quantità della prima miscela $= y$;
la quantità della prima miscela $= z$; con $x, y, z \in R^+$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 30\% \cdot x + 20\% \cdot y + 10\% \cdot z = 19{,}50\% \cdot (x + y + z) \\ 800 \cdot x + 900 \cdot y + 1100 \cdot z = 935 \cdot (x + y + z) \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 10 \\ \frac{30}{100} \cdot x + \frac{20}{100} \cdot y + \frac{10}{100} \cdot z = \frac{19{,}5}{100} \cdot 10 \\ 800 \cdot x + 900 \cdot y + 1100 \cdot z = 935 \cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ \frac{30}{100} \cdot x + \frac{20}{100} \cdot y + \frac{10}{100} \cdot z = \frac{195}{100} \\ 800 \cdot x + 900 \cdot y + 1100 \cdot z = 9350 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 30x + 20y + 10z = 195 \\ 80x + 90y + 110z = 935 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 10 - x - y \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 30x + 20y + 10 \cdot (10 - x - y) = 195 \\ 80x + 90y + 110 \cdot (10 - x - y) = 935 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 30x + 20y + 100 - 10x - 10y = 195 \\ 80x + 90y + 1100 - 110x - 110y = 935 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 20x + 10y = 95 \\ -30x - 20y = -165 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 4x + 2y = 19 \\ 6x + 4y = 33 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ y = \frac{19}{2} - 2x \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ 6x + 4 \cdot \left(\frac{19}{2} - 2x\right) = 33 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ 6x + 38 - 8x = 33 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ -2x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ y = \frac{19}{2} - 2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{19}{2} - \frac{10}{2} = \frac{9}{2} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} z = 10 - \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = 3 \\ - \\ - \end{cases}$$

Pertanto occorrono: 2,5 l della prima miscela, 4,5 l della seconda miscela e 3 l della terza miscela.