Prova di Matematica : Numeri reali e radicali

Alunno: ______________________________________ Classe: 2B L. Scientifico

1. Per ognuna delle seguenti affermazioni ed espressioni indica se è vera V o falsa F, motivando la risposta.

Il quoziente di due numeri irrazionali è sempre irrazionale	V	F
$7{,}41441444144441\ .\ .\ .$ è un numero razionale	V	F
$\sqrt{(-2)^2} = \pm 2$	V	F

$\sqrt[3]{7} < \sqrt[4]{12}$	V	F
$\sqrt{11+\sqrt{21}} = \frac{1+\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$	V	F
$\sqrt{a^2} = a$ se $a \geq 0$	V	F

2. Completa, motivando le tue risposte.

$28 - 10\sqrt{3} = (\qquad\qquad)^2$	$\frac{\sqrt[6]{27}}{81} = 9^{\,—}$
Le condizioni di esistenza di $\sqrt{\frac{4-a^2}{a^2+1}}$ sono	$2x > \sqrt{5}\,x\ ;\qquad x\ .\ .\ .$

3. Semplifica i seguenti radicali

$\sqrt[24]{\frac{8a^{12}}{b^3}} =$	$\sqrt[4]{\frac{a^5+4a^3+4a}{a^3b^6}}$

4. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili

$\sqrt{\frac{27}{98}}$	$\sqrt{\frac{y^3+3y^2+3y+1}{y^2-1}}$

5. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo positivi tutti i fattori letterali.

$$\sqrt{2-\frac{6a+8}{4a+6}} : \left(\sqrt[3]{\frac{4}{2a+2}+2} \cdot \sqrt{1-\frac{2a+2}{4a+6}}\right)$$

$$\left(\frac{a^{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^{3-\sqrt{2}}}}\right)^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} : \left(\frac{a^{3\sqrt{3}} \cdot a^{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{a^{\sqrt{2}}} \cdot a^{9\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{8}}$$

6. Nel trapezio rettangolo $\mathbf{ABCD}$ l'angolo $\widehat{\mathbf{B}} = 45°$, la base maggiore $\overline{\mathbf{AB}} = 8\sqrt{6}$ e la base minore è la metà della base maggiore. Determina il perimetro del trapezio.

Soluzione

1. Per ognuna delle seguenti affermazioni ed espressioni indica se è vera V o falsa F, motivando la risposta.

Il quoziente di due numeri irrazionali è sempre irrazionale	F	$\sqrt[3]{7} < \sqrt[4]{12}$	F
$7{,}41441444144441\ ...$ è un numero razionale	F	$\sqrt{11+\sqrt{21}} = \frac{1+\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$	V
$\sqrt{(-2)^2} = \pm 2$	F	$\sqrt{a^2} = a$ se $a \geq 0$	V

$\sqrt[3]{7} < \sqrt[4]{12}$; $\quad \sqrt[12]{7^4} < \sqrt[12]{12^3}$; $\quad \sqrt[12]{2401} < \sqrt[12]{1728}$ **Falso**

$\sqrt{11+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{100}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{100}}{2}} = \sqrt{\frac{11+10}{2}} + \sqrt{\frac{11-10}{2}} = \sqrt{\frac{21}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1+\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$ $\qquad a^2 - b = 121 - 21 = 100$

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

2. Completa, motivando le tue risposte.

$28 - 10\sqrt{3} = \underline{25} + \underline{3} - 10\sqrt{3} = \left(\ 5 - \sqrt{3}\ \right)^2$

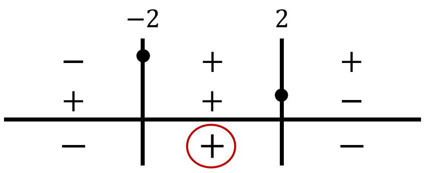
$\frac{\sqrt[6]{27}}{81} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{3^4} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^4} = 3^{\frac{1}{2}-4} = 3^{-\frac{7}{2}} =$

$= \left[(3^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{7}{2}} = \left[(9)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{7}{2}} = 9^{-\frac{7}{4}}$

Le condizioni di esistenza di $\sqrt{\frac{4-a^2}{a^2+1}}$ sono $-2 \leq a \leq 2$.

Infatti:

$\frac{4-a^2}{a^2+1} \geq 0 \qquad \begin{matrix} 4-a^2 \geq 0 \\ a^2+1 > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (2+a)(2-a) \geq 0 \\ \forall a \in R \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2+a \geq 0 \\ 2-a \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \geq -2 \\ a \leq 2 \end{matrix}$



$2x > \sqrt{5}\,x$; $\quad 2x - \sqrt{5}\,x > 0$; $\quad \left(2-\sqrt{5}\right)x > 0$; $\quad -\left(2-\sqrt{5}\right)x < 0$; $\quad \left(\sqrt{5}-2\right)x < 0$; $\quad x < 0$.

3. Semplifica i seguenti radicali

$\sqrt[24]{\frac{8a^{12}}{b^3}} = \sqrt[8]{\frac{2a^4}{b}} \quad con\ \ b > 0$

$\sqrt[4]{\frac{a^5+4a^3+4a}{a^3b^6}} = \sqrt[4]{\frac{a\cdot(a^4+4a^2+4)}{a^3b^6}} = \sqrt[4]{\frac{a\cdot(a^2+2)^2}{a^3b^6}} =$

$= \sqrt[4]{\frac{(a^2+2)^2}{a^2b^6}} = \sqrt[2]{\frac{a^2+2}{|a|\cdot|b^3|}} \quad con\ \ a \neq 0\ \ \wedge\ \ b \neq 0 .$

4. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili

$\sqrt{\frac{27}{98}} = \sqrt{\frac{3^2\cdot 3}{7^2\cdot 2}} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{14}$

$\sqrt{\frac{y^3+3y^2+3y+1}{y^2-1}} = \sqrt{\frac{(y+1)^3}{(y+1)(y-1)}} = \sqrt{\frac{(y+1)^2}{(y-1)}} =$

$= |y+1|\cdot\sqrt{\frac{1}{y-1}} = \frac{y+1}{\sqrt{y-1}} \quad con\ \ y > 1$.

5. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo positivi tutti i fattori letterali.

$$\sqrt{2-\frac{6a+8}{4a+6}}:\left(\sqrt[3]{\frac{4}{2a+2}+2}\cdot\sqrt{1-\frac{2a+2}{4a+6}}\right) = \sqrt{2-\frac{2(3a+4)}{2(2a+3)}}:\left(\sqrt[3]{\frac{4}{2(a+1)}+2}\cdot\sqrt{1-\frac{2(a+1)}{2(2a+3)}}\right) =$$

$$=\sqrt{\frac{4a+6-3a-4}{2a+3}}:\left(\sqrt[3]{\frac{2+2a+2}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{2a+3-a-1}{2a+3}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{a+2}{2a+3}}}{\sqrt[3]{\frac{2a+4}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{2a+3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2(a+2)}{a+1}}} = \sqrt[3]{\frac{a+1}{2(a+2)}}$$

$$\left(\frac{a^{2\sqrt2}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^{3-\sqrt2}}}\right)^{\frac{2\sqrt2}{3}} : \left(\frac{a^{3\sqrt3}\cdot a^{\sqrt2}}{\sqrt[3]{a^{\sqrt2}}\cdot a^{9\sqrt3}}\right)^{\sqrt8} =$$

$$\left(\frac{a^{2\sqrt2}\cdot a^{\frac32}}{a^{\frac{3-\sqrt2}{2}}}\right)^{\frac{2\sqrt2}{3}} : \left(\frac{a^{3\sqrt3+\sqrt2}}{a^{\frac{\sqrt2}{3}}\cdot a^{9\sqrt3}}\right)^{2\sqrt2} =$$

$$= \left(a^{2\sqrt2+\frac32-\frac{3-\sqrt2}{2}}\right)^{\frac{2\sqrt2}{3}} : \left(a^{3\sqrt3+\sqrt2-\frac{\sqrt2}{3}-9\sqrt3}\right)^{2\sqrt2} =$$

$$= \left(a^{2\sqrt2+\frac32-\frac32+\frac{\sqrt2}{2}}\right)^{\frac{2\sqrt2}{3}} : \left(a^{\frac23\sqrt2-6\sqrt3}\right)^{2\sqrt2} =$$

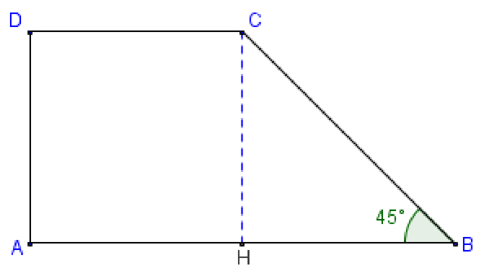
$$= a^{\frac{5\sqrt2}{2}\cdot\frac{2\sqrt2}{3}} : a^{\left(\frac23\sqrt2-6\sqrt3\right)\cdot2\sqrt2} =$$

$$= a^{\frac{10}{3}} : a^{\frac83-12\sqrt6} =$$

$$= a^{\frac{10}{3}-\left(\frac83-12\sqrt6\right)} .$$

$$= a^{\frac23+12\sqrt6} .$$

6. Nel trapezio rettangolo ABCD **l'angolo** $\widehat{\mathrm{B}}=45°$**, la base maggiore** $\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt6$ **e la base minore è la metà della base maggiore. Determina il perimetro del trapezio.**



Soluzione

$$\overline{CD} = \frac12\,\overline{AB} = \frac12\cdot8\sqrt6 = 4\sqrt6$$

$$\overline{BH} = \overline{AB}-\overline{AH} = 8\sqrt6-4\sqrt6 = 4\sqrt6$$

$$\overline{CH} = \overline{BH} = 4\sqrt6$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^{\,2}+\overline{BH}^{\,2}} = \sqrt{\left(4\sqrt6\right)^2+\left(4\sqrt6\right)^2} = \sqrt{96+96} = \sqrt{192} = \sqrt{2^6\cdot3} = 2^3\cdot\sqrt3 = 8\sqrt3 .$$

$$p = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD} = 8\sqrt6+8\sqrt3+4\sqrt6+4\sqrt6 = 16\sqrt6+8\sqrt3 .$$

oppure

5. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo positivi tutti i fattori letterali.

$$\sqrt{2-\frac{6a+8}{4a+6}}:\left(\sqrt[3]{\frac{4}{2a+2}+2}\cdot\sqrt{1-\frac{2a+2}{4a+6}}\right)=\sqrt{2-\frac{2(3a+4)}{2(2a+3)}}:\left(\sqrt[3]{\frac{4}{2(a+1)}+2}\cdot\sqrt{1-\frac{2(a+1)}{2(2a+3)}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{4a+6-3a-4}{2a+3}}:\left(\sqrt[3]{\frac{2+2a+2}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{2a+3-a-1}{2a+3}}\right)=\sqrt{\frac{a+2}{2a+3}}:\left(\sqrt[3]{\frac{2a+4}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{2a+3}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{a+2}{2a+3}}:\left(\sqrt[3]{\frac{2(a+2)}{a+1}}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{2a+3}}\right)=\sqrt[6]{\frac{(a+2)^3}{(2a+3)^3}}:\left(\sqrt[6]{\frac{4(a+2)^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+2)^3}{(2a+3)^3}}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{(a+2)^3}{(2a+3)^3}}:\left(\sqrt[6]{\frac{4(a+2)^5}{(a+1)^2\cdot(2a+3)^3}}\right)=\sqrt[6]{\frac{(a+2)^3}{(2a+3)^3}\cdot\frac{(a+1)^2\cdot(2a+3)^3}{4(a+2)^5}}=\sqrt[6]{\frac{(a+1)^2}{4(a+2)^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a+1}{2(a+2)}}\,.$$