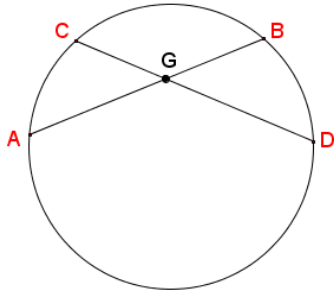


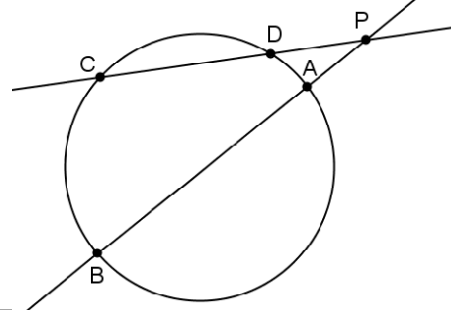
Prova di Matematica : Similitudine, T. Euclide e T. Pitagora

Alunno: _____ Classe: 2A L. Scientifico

1. Determina la misura del segmento CG, sapendo che $\overline{AG} = 4 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 9 \text{ cm}$, $\overline{GD} = 10 \text{ cm}$

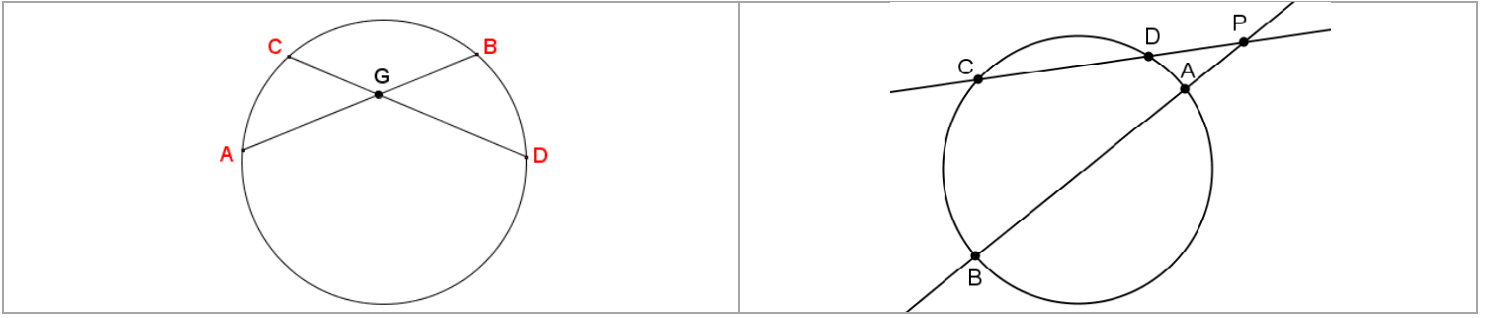


2. Determina la misura del segmento PD, sapendo che $\overline{CD} = 10 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$ e $\overline{AP} = 4 \text{ cm}$



3. In un triangolo rettangolo il cateto AB misura $5a$ e l'altezza relativa all'ipotenusa AH misura $\frac{60}{13}a$. Determina le misure degli altri due lati del triangolo.
4. Un triangolo rettangolo ABC ha l'angolo $\hat{C} = 30^\circ$. La bisettrice BD dell'angolo \hat{B} misura 10 cm . Calcola l'area del triangolo ABC.
5. Nel rettangolo ABCD $\overline{AB} = 48 \text{ cm}$ e $\overline{AD} = 36 \text{ cm}$. Sia P il punto della diagonale BD tale che $\overline{DP} = \frac{1}{6}\overline{BD}$. Da P conduci la parallela ad AD e indica con H e K le intersezioni di tale parallela rispettivamente con AB e con CD. Determina l'area del quadrilatero BCPH.

Soluzione



1. Determina la misura del segmento CG, sapendo che $\overline{AG} = 4 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 9 \text{ cm}$, $\overline{GD} = 10 \text{ cm}$.

Soluzione

$$\overline{GB} = \overline{AB} - \overline{AG} = (9 - 4) \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Per il Teorema delle corde si ha:

$$\overline{AG} : \overline{CG} = \overline{GD} : \overline{GB}; \quad 4 : \overline{CG} = 10 : 5;$$

$$\overline{CG} = \left(\frac{4 \cdot 5}{10} \right) \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

2. Determina la misura del segmento PD, sapendo che $\overline{CD} = 10 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$ e $\overline{AP} = 4 \text{ cm}$

Soluzione

Poniamo $\overline{PD} = x$, con $x \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow \overline{PC} = x + 10$

$$\overline{PB} = \overline{AP} + \overline{AB} = (4 + 20) \text{ cm} = 24 \text{ cm}.$$

Per il Teorema delle secanti:

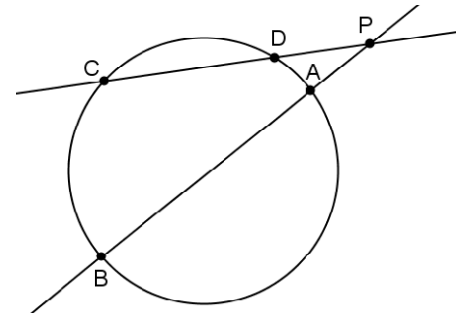
$$\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}; \quad 4 : x = (x + 10) : 24;$$

$$x \cdot (x + 10) = 4 \cdot 24;$$

$$x^2 + 10x - 96 = 0; \quad \frac{\Delta}{4} = 25 + 96 = 121;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{121}}{1} = -5 \mp 11 = \begin{matrix} x_1 = -16 & \text{Non accettabile} \\ x_2 = +6 & \text{Accettabile} \end{matrix}$$

Pertanto $\overline{PD} = 6 \text{ cm}$.



3. In un triangolo rettangolo il cateto AB misura $5a$ e l'altezza relativa all'ipotenusa AH misura $\frac{60}{13}a$. Determina le misure degli altri due lati del triangolo.

Soluzione

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH si ottiene:

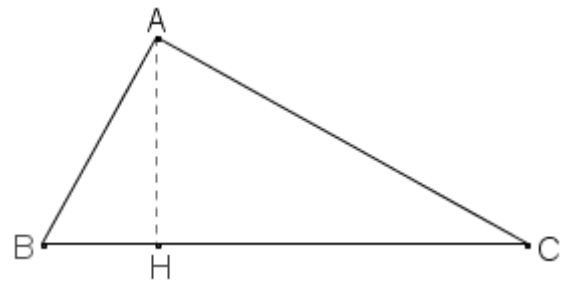
$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{25a^2 - \frac{3600}{169}a^2} = \sqrt{\frac{4225 - 3600}{169}a^2} = \sqrt{\frac{625}{169}a^2} = \frac{25}{13}a.$$

Applicando il I Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ottiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}; \quad \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BH}} = \frac{25a^2}{\frac{25}{13}a} = 13a.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ottiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{169a^2 - 25a^2} = \sqrt{144a^2} = 12a.$$



4. Un triangolo rettangolo ABC ha l'angolo $\hat{C} = 30^\circ$. La bisettrice BD dell'angolo \hat{B} misura 10 cm. Calcola l'area del triangolo ABC.

Soluzione

La bisettrice divide l'angolo $\hat{B} = 60^\circ$ in due angoli di 30° , quindi il triangolo DBC è isoscele.

Pertanto $\overline{BD} = \overline{DC} = 10 \text{ cm}$.

Utilizzando i teoremi sul triangolo rettangolo si ha:

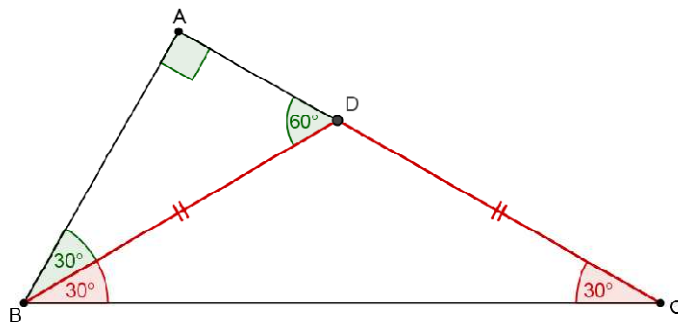
$$\overline{AD} = \overline{BD} \cdot \sin 30 = 10 \text{ cm} \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}.$$

$$\overline{AB} = \overline{BD} \cdot \cos 30 = 10 \text{ cm} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Pertanto $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = (5 + 10) \text{ cm} = 15 \text{ cm}$.

L'area del triangolo rettangolo ABC è:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 15 \text{ cm}^2 = \frac{75}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



5. Nel rettangolo ABCD $\overline{AB} = 48 \text{ cm}$ e $\overline{AD} = 36 \text{ cm}$. Sia P il punto della diagonale BD tale che $\overline{DP} = \frac{1}{6}\overline{BD}$. Da P conduci la parallela ad AD e indica con H e K le intersezioni di tale parallela rispettivamente con AB e con CD. Determina l'area del quadrilatero BCPH.

Soluzione 1

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD si ottiene:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{2304 + 1296} \text{ cm} = \sqrt{3600} \text{ cm} = 60 \text{ cm}.$$

$$\text{Quindi: } \overline{DP} = \frac{1}{6}\overline{BD} = \frac{1}{6} \cdot 60 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad \text{mentre} \quad \overline{BP} = \overline{BD} - \overline{DP} = (60 - 10) \text{ cm} = 50 \text{ cm}.$$

I triangoli ABD e HBP sono simili per il I criterio di similitudine.

Infatti:

$$\widehat{DAB} \cong \widehat{PHB} = 90^\circ$$

\widehat{ABD} angolo in comune ai due triangoli.

Pertanto i lati omologhi sono proporzionali: $\overline{AB} : \overline{HB} = \overline{BD} : \overline{BP}$;

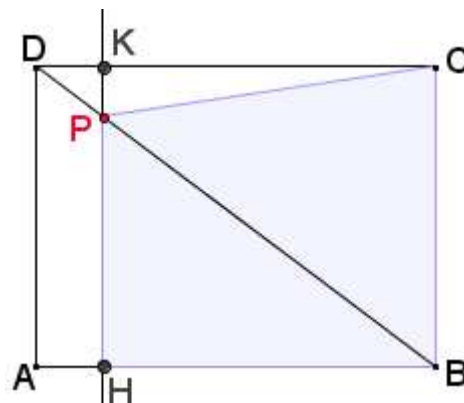
$$48 : \overline{HB} = 60 : 50; \quad \overline{HB} = \frac{48 \cdot 50}{60} \text{ cm} = 40 \text{ cm}.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PBH si ottiene:

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{BP}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{2500 - 1600} \text{ cm} = \sqrt{900} \text{ cm} = 30 \text{ cm}.$$

L'area richiesta è:

$$S_{BCPH} = \frac{\overline{BC} + \overline{PH}}{2} \cdot \overline{HB} = \left(\frac{36 + 30}{2} \cdot 40 \right) \text{ cm}^2 = 1320 \text{ cm}^2.$$



Soluzione 2

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD si ottiene:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{2304 + 1296} \text{ cm} = \sqrt{3600} \text{ cm} = 60 \text{ cm}.$$

$$\text{Quindi: } \overline{DP} = \frac{1}{6}\overline{BD} = \frac{1}{6} \cdot 60 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad \text{mentre} \quad \overline{BP} = \overline{BD} - \overline{DP} = (60 - 10) \text{ cm} = 50 \text{ cm}.$$

I triangoli PDK e PBH sono simili per il I criterio di similitudine.

Infatti:

$$\widehat{PKD} \cong \widehat{PHB} = 90^\circ$$

$$\widehat{DKP} \cong \widehat{BHP} \quad \text{perché alterni interni.}$$

Pertanto i lati omologhi sono proporzionali: $\overline{PK} : \overline{PH} = \overline{DP} : \overline{PB}$;

$$\text{Ponendo } \overline{PH} = x, \quad \text{con } 0 < x < 36 \quad \Rightarrow \quad \overline{PK} = 36 - x.$$

Sostituendo si ha:

$$(36 - x) : x = 10 : 50; \quad 10x = 1800 - 50x; \quad 60x = 1800; \quad x = 30.$$

$$\text{Pertanto } \overline{PH} = 30 \text{ cm} \quad \text{mentre} \quad \overline{PK} = \overline{HK} - \overline{PH} = (36 - 30) \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PDK si ottiene:

$$\overline{DK} = \sqrt{\overline{DP}^2 - \overline{PK}^2} = \sqrt{100 - 36} \text{ cm} = \sqrt{64} \text{ cm} = 8 \text{ cm}.$$

$$\text{Quindi: } \overline{HB} = \overline{AB} - \overline{DK} = (48 - 8) \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

L'area richiesta è:

$$S_{BCPH} = \frac{\overline{BC} + \overline{PH}}{2} \cdot \overline{HB} = \frac{36 + 30}{2} \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 1320 \text{ cm}^2.$$