Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2015-2016

05.02.2016

prof. Mimmo Corrado

Tempo: 60 minuti.

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

Alunno: ____ *Classe: 2A* *L. Scientifico*

1. Dato il fascio di rette di equazione $(\boldsymbol{k}+\mathbf{2})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{y}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$, determina:

a. il tipo (fascio proprio / fascio improprio)
b. la retta *b* del fascio passante per il punto $P(-4;2)$
c. la retta *c* del fascio perpendicolare all'asse *y*
d. la retta *d* del fascio parallela alla retta s di equazione $6x+3y-2=0$

2. Dato il triangolo di vertici: $\mathbf{A}\ (\mathbf{2};\mathbf{2})$, $\mathbf{B}\ (\mathbf{6};\ -\mathbf{1})$, $\mathbf{C}\ (-\mathbf{4};\ \mathbf{3})$, determina:

a. l'area del triangolo
b. le coordinate del circocentro T

Soluzione

1. Dato il fascio di rette di equazione $(k+2)x-(k+1)y+3=0$, determina:

a. il tipo (fascio proprio / fascio improprio)
b. la retta *b* del fascio passante per il punto $P(-4;2)$
c. la retta *c* del fascio perpendicolare all'asse *y*
d. la retta *d* del fascio parallela alla retta s di equazione $6x+3y-2=0$

a. Si tratta di un fascio proprio di rette perché il coefficiente angolare dipende dal parametro

$m=\dfrac{k+2}{k+1}$ $\qquad$ $Il\ centro\ del\ fascio\ ha\ coordinate\colon\ C=(-3\,;\,-3)$

b. Imponendo il passaggio per il punto $P(-4;2)$ si ha:

$(k+2)\cdot(-4)-(k+1)\cdot 2+3=0\,;$ $\qquad$ $-4k-8-2k-2+3=0\,;$

$-6k-7=0\,;$ $\qquad$ $k=-\dfrac{7}{6}$

La retta richiesta *b* ha equazione:

$\left(-\dfrac{7}{6}+2\right)x-\left(-\dfrac{7}{6}+1\right)\cdot y+3=0\,;$ $\qquad$ $\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}y+3=0$ $\qquad$ $5x+y+18=0$

c. la retta *c* del fascio perpendicolare all'asse y è del tipo $by+c=0$ (cioè $a=0$).

Essa si ottiene per $k=-2$.

La sua equazione è: $(-2+2)x-(-2+1)\cdot y+3=0\,;$ $\qquad$ $y+3=0\,;$ $\qquad$ $y=-3$.

d. la retta *d* del fascio parallela alla retta s di equazione $6x+3y-2=0$

si ottiene imponendo la condizione di parallelismo: $m_f=m_s$.

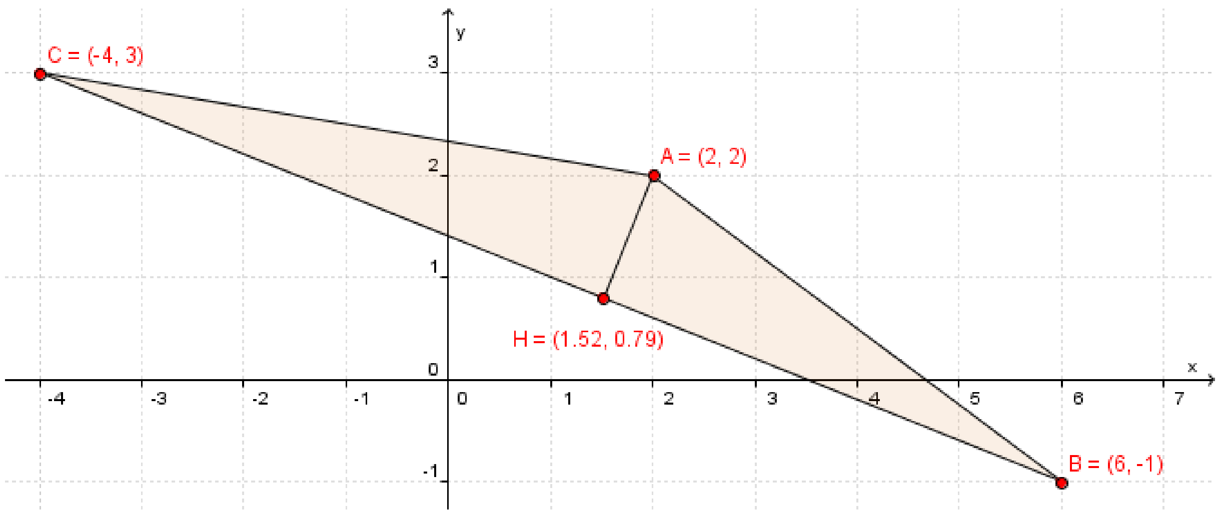
$\dfrac{k+2}{k+1}=-2\,;$ $\quad$ $C.E.\colon\ k\neq -1$ $\qquad$ $k+2=-2(k+1)\,;$ $\quad$ $k+2=-2k-2\,;$ $\quad$ $3k=-4$ $\quad$ $k=-\dfrac{4}{3}$

la sua equazione è:

$\left(-\dfrac{4}{3}+2\right)x-\left(-\dfrac{4}{3}+1\right)\cdot y+3=0\,;$ $\qquad$ $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y+3=0$ $\qquad$ $2x+y+9=0$.

2. Dato il triangolo di vertici: $\mathbf{A}\,(2;2)$, $\mathbf{B}\,(6;\,-1)$, $\mathbf{C}\,(-4;\,3)$, determina:

a. l'area del triangolo
b. le coordinate del circocentro T



Soluzione a

Calcoliamo la misura della base BC:

$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(6+4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116}\, u = 2\sqrt{29}\ u$

Per il calcolo dell'area del triangolo occorre determinare la misura dell'altezza AH.

Per calcolare la misura dell'altezza AH è necessario conoscere le coordinate del punto H.

Il punto H è il punto di intersezione delle due rette BC e AH.

Calcoliamo pertanto le equazioni delle rette BC e AH :

L'equazione della retta BC è data da:

$\dfrac{y - y_B}{y_C - y_B} = \dfrac{x - x_B}{x_C - x_B}$; $\quad \dfrac{y+1}{3+1} = \dfrac{x-6}{-4-6}$; $\quad \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{x-6}{-10}$; $\quad 5 \cdot (y+1) = -2(x-6)$;

$5y + 5 = -2x + 12$; $\quad 2x + 5y - 7 = 0$.

Il cui coefficiente angolare $m_{BC} = -\frac{2}{5}$.

La retta AH perpendicolare alla retta BC ha coefficiente angolare: $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{5}{2}$

ed equazione: $y - y_A = m_{AH}\,(x - x_A)$; $\quad y - 2 = \frac{5}{2} \cdot (x-2)$; $\quad y - 2 = \frac{5}{2}x - 5$; $\quad y = \frac{5}{2}x - 3$.

Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette BC e AH:

$\begin{cases} 2x + 5y - 7 = 0 \\ y = \frac{5}{2}x - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5\left(\frac{5}{2}x - 3\right) - 7 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + \frac{25}{2}x - 15 - 7 = 0 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + 25x - 44 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 29x = 44 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{44}{29} \\ y = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{44}{29} - 3 = \dfrac{220}{58} - 3 = \dfrac{220 - 174}{58} = \dfrac{46}{58} = \dfrac{23}{29} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{44}{29}; \dfrac{23}{29}\right)$

Calcoliamo la misura dell'altezza AH:

$$\overline{AH} = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{44}{29}\right)^2 + \left(2 - \frac{23}{29}\right)^2}\ u = \sqrt{\left(\frac{14}{29}\right)^2 + \left(\frac{35}{29}\right)^2}\ u =$$

$$= \sqrt{\frac{194}{841} + \frac{1225}{841}}\ u = \sqrt{\frac{196 + 1225}{841}}\ u = \sqrt{\frac{1421}{841}}\ u = \sqrt{\frac{49}{29}} = \frac{7}{\sqrt{29}}\ u\ .$$

Pertanto l'area del triangolo è:

$S = \dfrac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{29}\ \cdot \dfrac{7}{\sqrt{29}} u^2 = 7\ u^2$.

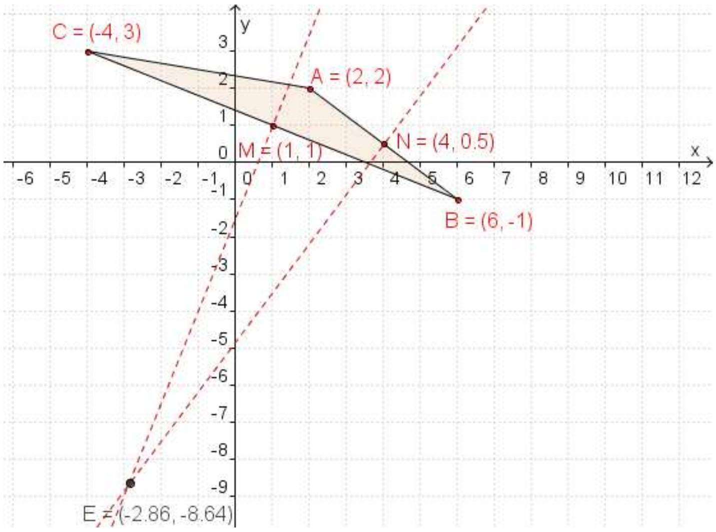
Metodo 2

L'area del triangolo può essere calcolata anche con la formula:

$$S=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_C-x_A & y_C-y_A\\ x_B-x_A & y_B-y_A\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-4-2 & 3-2\\ 6-2 & -1-2\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot(18-4)\right|=7\,u^2$$

Soluzione b

Il circocentro di un triangolo è il punto d'incontro dei tre assi.



Il punto medio M del lato BC ha coordinate:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{6-4}{2}=1\ ;$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$$

Il coefficiente angolare della retta BC è già stato determinato in precedenza: $m_{BC}=-\frac{2}{5}$

L'equazione dell'asse del segmento BC è:

$y-y_M=-\frac{1}{m_{BC}}\,(x-x_M)\ ;\qquad y-1=\frac{5}{2}\cdot(x-1)\ ;\qquad y=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}+1\ ;\qquad y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$

Il punto medio N del lato AB ha coordinate:

$$x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4\ ;\qquad\qquad y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{2+1}{2-6}=-\frac{3}{4}$$

L'equazione dell'asse del segmento AB è:

$y-y_N=-\frac{1}{m_{AB}}\,(x-x_N)\ ;\qquad y-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}\,(x-4)\ ;\qquad y=\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}+\frac{1}{2}\ ;\qquad y=\frac{4}{3}x-\frac{29}{6}$

Determiniamo le coordinate del circocentro E, punto di incontro dei due assi:

$$\begin{cases}y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\\ y=\frac{4}{3}x-\frac{29}{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{4}{3}x-\frac{29}{6}=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\\ -\end{cases}\qquad\begin{cases}8x-29=15x-9\\ -\end{cases}$$

$$\begin{cases}-7x=29-9\\ -\end{cases}\qquad\begin{cases}7x=-20\\ -\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\frac{20}{7}\\ y=\frac{5}{2}\left(-\frac{20}{7}\right)-\frac{3}{2}=-\frac{50}{7}-\frac{3}{2}=\frac{-100-21}{14}=-\frac{121}{14}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{20}{7}\\ y=-\frac{121}{14}\end{cases}$$

Pertanto, il circocentro ha coordinate: $E\left(-\frac{20}{7};\,-\frac{121}{14}\right)$.