Alunno: ____ Classe: 2A L. Scientifico

1. **Risolvi le seguenti equazioni:**
   $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

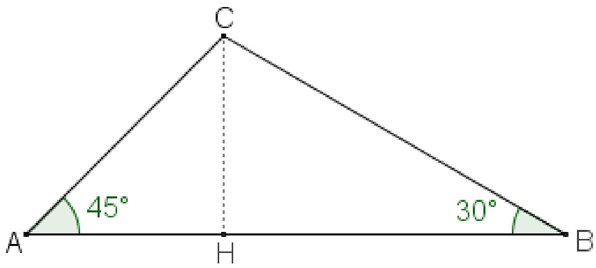
   $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$

   $\dfrac{1-2x^2}{1+2x} - \dfrac{x^2+3x}{2x^2-3x-2} + \dfrac{3x^2-4x}{2x-x^2} = 0\,;$

2. **Risolvi ed effettua la discussione della seguente equazione letterale nell'incognita x :**
   $ax^2 - 2(a-3)x + 6 - 3a = 0$

3. **Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, con vertice in $V\,(1\,;\,-1)$ e passante per l'origine degli assi cartesiani, e rappresentala graficamente. Detto F il fuoco e A il secondo punto di intersezione della parabola con l'asse delle x, calcola l'area del triangolo OAF .**

4. **Con riferimento alla figura a lato, sapendo che $\overline{AB}^{\,2} + \overline{CB}^{\,2} = 128 + 32\sqrt{3}$, trova il perimetro di ABC.**



Soluzione

1. **Risolvi le seguenti equazioni:**

$\boldsymbol{x^8 - 15x^4 - 16 = 0}$; Si pone $x^4 = z$; si ottiene: $z^2 - 15z - 16 = 0$;

$\Delta = 225 + 64 = 289 \qquad z_{1,2} = \dfrac{15 \mp \sqrt{289}}{2} = \begin{matrix} x_1 = \dfrac{15-17}{2} = -1 & x^4 = -1 & \nexists x \in R \\ x_2 = \dfrac{15+17}{2} = 16 & x^4 = 16 & x_{1,2} = \mp 2 \end{matrix}$

$\boldsymbol{2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0}$

Non essendo $x = 0$ soluzione dell'equazione dividiamo tutti i termini per x^2

$2x^2 - x - 6 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 0$; $\qquad 2 \cdot \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 6 = 0$;

Si pone $x + \frac{1}{x} = z \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$2 \cdot (z^2 - 2) - z - 6 = 0$; $\qquad 2z^2 - 4 - z - 6 = 0$;

$2z^2 - z - 10 = 0$; $\qquad \Delta = 1 + 80 = 81 \qquad z_{1,2} = \dfrac{1 \mp 9}{4} = \begin{matrix} z_1 = -2 \\ z_2 = +\dfrac{5}{2} \end{matrix}$

Sostituendo in $x + \frac{1}{x} = z$ si ha:

$x + \dfrac{1}{x} = -2$; $\qquad x^2 + 1 = -2x$; $\qquad x^2 + 2x + 1 = 0$; $\qquad (x+1)^2 = 0$; $\qquad x_{1,2} = \boldsymbol{-1}$

$x + \dfrac{1}{x} = +\dfrac{5}{2}$; $\qquad 2x^2 + 2 = 5x$; $\qquad 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 \qquad x_{1,2} = \dfrac{5 \mp 3}{4} = \begin{matrix} x_3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}} \\ x_4 = \boldsymbol{2} \end{matrix}$

$\boldsymbol{\dfrac{1-2x^2}{1+2x} - \dfrac{x^2+3x}{2x^2-3x-2} + \dfrac{3x^2-4x}{2x-x^2} = 0}$; $\qquad \dfrac{1-2x^2}{1+2x} - \dfrac{x(x+3)}{2x^2-3x-2} + \dfrac{x(3x-4)}{x(2-x)} = 0$;

$\dfrac{1-2x^2}{1+2x} - \dfrac{x(x+3)}{(x-2)(2x+1)} - \dfrac{3x-4}{x-2} = 0$; $\qquad C.E.: \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 2 \quad \wedge \quad x \neq -\dfrac{1}{2}$

$(1-2x^2)(x-2) - x(x+3) - (3x-4)(2x+1) = 0$;

$x - 2 - 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 3x - 6x^2 - 3x + 8x + 4 = 0$;

$-2x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0$;

$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$;

$(x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$

	2	+3	−3	−2
+1		+2	+5	+2
	2	+5	+2	=

$\Delta = 25 - 16 = 9 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-5 \mp 3}{4} = \begin{matrix} x_3 = \boldsymbol{-2} & \textit{\textbf{accettabile}} \\ x_4 = -\boldsymbol{\dfrac{1}{2}} & \textit{\textbf{non accettabile}} \end{matrix}$

Le soluzioni sono $\boldsymbol{x_1 = 1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x_2 = -2}$.

2. Risolvi ed effettua la discussione della seguente equazione letterale nell'incognita x:

$ax^2 - 2(a-3)x + 6 - 3a = 0$

$A = a$	$B = -2(a-3)$	$C = 6 - 3a$

$A = 0$ (Equazione di I grado) $\Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x + 6 = 0\,; \quad x = -1$

$B = 0$ (Equazione Pura) $\Rightarrow \quad a - 3 = 0\,; \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0\,; \quad x^2 = 1\,; \quad x_{1,2} = \mp 1$

$C = 0$ (Equazione Spuria) $\Rightarrow \quad 6 - 3a = 0; \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2x = 0\,; \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$

$$\frac{\Delta}{4} = (a-3)^2 - a(6-3a) = a^2 + 9 - 6a - 6a + 3a^2 = 4a^2 - 12a + 9 = (2a-3)^2$$

$$\frac{\Delta}{4} > 0\,; \quad (2a-3)^2 > 0\,; \quad 2a - 3 \neq 0\,; \quad a \neq \frac{3}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{B}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{A} = \frac{a - 3 \mp \sqrt{(2a-3)^2}}{a} = \frac{a - 3 \mp (2a-3)}{a} = \begin{matrix} x_1 = \dfrac{a - 3 - 2a + 3}{a} = \dfrac{-a}{a} = -1 \\ x_2 = \dfrac{a - 3 + 2a - 3}{a} = \dfrac{3a - 6}{a} \end{matrix}$$

$$\Delta = 0: \quad (2a-3)^2 = 0\,; \quad 2a - 3 = 0\,; \quad a = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{B}{2}}{A} = \frac{a-3}{a} = \frac{\frac{3}{2} - 3}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1\,.$$

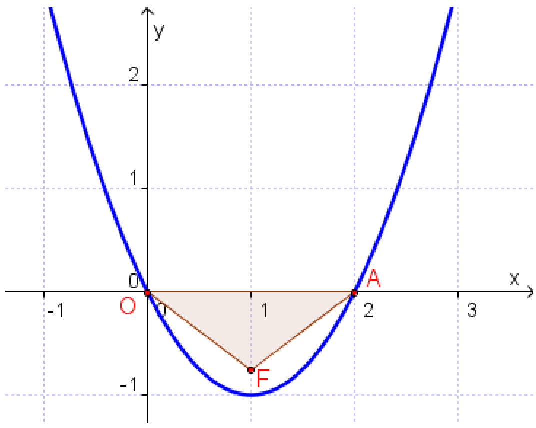
$$\Delta < 0\,; \quad (2a-3)^2 < 0 \quad \nexists a \in R.$$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 0$	Equazione di I° grado	$x = -1$
$a = 3$	Equazione Pura	$x_{1,2} = \mp 1$
$a = 2$	Equazione Spuria	$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -1$
$a = \frac{3}{2}$	Equazione Completa con $\Delta = 0$	$x_{1,2} = -1$
$\nexists a \in R$	Equazione Completa con $\Delta < 0$	-
$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 3 \quad \wedge \quad a \neq 2 \quad \wedge \quad a \neq \frac{3}{2}$	Equazione Completa con $\Delta > 0$	$x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{3a-6}{a}$

3. Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, con vertice in $V\,(1\,;\,-1)$ e passante per l'origine degli assi cartesiani, e rappresentala graficamente. Detto F il fuoco e A il secondo punto di intersezione della parabola con l'asse delle x, calcola l'area del triangolo OAF .

<u>*Soluzione*</u>



L'equazione della parabola richiesta è del tipo $y = ax^2 + bx$

Imponendo le condizioni sul vertice si ha:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ -1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -b = 2a \\ -1 = a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ -1 = a - 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

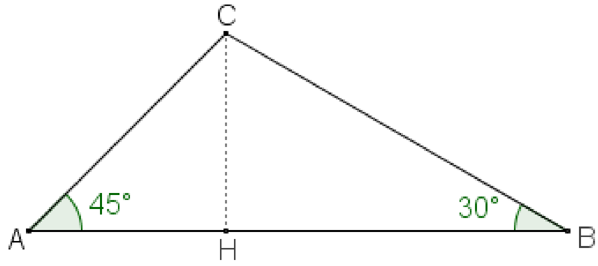
$$\Rightarrow \qquad y = x^2 - 2x$$

$$x_F = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_F = \frac{1 - \Delta}{4a} = \frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4 \cdot a} = \frac{1 - (-2)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad F\left(1\,;\,-\frac{3}{4}\right)$$

$$S = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{FH}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

Con riferimento alla figura a lato, sapendo che $\overline{AB}^{\,2} + \overline{CB}^{\,2} = 128 + 32\sqrt{3}$, trova il perimetro di ABC.



Soluzione

Si pone $\overline{CH} = x \quad con\ x \in R^+ \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = x$

Dal triangolo rettangolo BCH si ha: $\overline{BC} = 2x$

$\overline{HB} = \sqrt{3}x \qquad \overline{AB} = x + \sqrt{3}x = \left(1+\sqrt{3}\right)x$.

Sostituendo nella relazione: $\overline{AB}^{\,2} + \overline{CB}^{\,2} = 128 + 32\sqrt{3}$; si ottiene:

$\left[\left(1+\sqrt{3}\right)x\right]^2 + 4x^2 = 128 + 32\sqrt{3}$;

$\left(1+3+2\sqrt{3}\right)x^2 + 4x^2 = 128 + 32\sqrt{3}$;

$\left(8+2\sqrt{3}\right)x^2 = 32\left(4+\sqrt{3}\right)$;

$x^2 = \dfrac{32\left(4+\sqrt{3}\right)}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$; $\qquad x^2 = 16$; $\qquad x_{1,2} = \mp 4 = \begin{matrix} x_1 = -4 & Non\ accettabile \\ x_2 = +4 & Accettabile \end{matrix}$

Sostituendo si ottiene: $\overline{BC} = 2 \cdot 4 = 8 \qquad \overline{AB} = 4\left(1+\sqrt{3}\right)$

Dal triangolo rettangolo ACH si ha: $\overline{AC} = \sqrt{2}x = 4\sqrt{2}$.

In definitiva il perimetro del triangolo ABC è

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 4\left(1+\sqrt{3}\right) + 8 + 4\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{2} = 12 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 4\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.