12.02.2015
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 1 A L. Scientifico

A. Sviluppa i seguenti prodotti notevoli:

$\left(-\frac{1}{2}xy+\frac{2}{3}x^2\right)^3$ $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}xy^3+6y^4\right)^2$ $\left(a^{2n}b-\frac{1}{2}ab^n\right)^3$

B. Semplifica le seguenti espressioni:

$2(3x^2-4y)(3x^2+4y)-(3x^2-4y)^2$ $(p-1)^2\cdot(p+1)^2-(p^2-p-1)(p^2+p-1)$

C. Determina quoziente e resto delle seguenti divisioni ed effettua la verifica.

$(16x^5-6x^3+2x-1):(2x^3-5)$ $(8x^4-6x^3-4x^2-1):(2x+4)$ $(x^4-81):(x^2+9)$

D. Un numero di due cifre viene sommato al numero ottenuto invertendo le sue cifre. Si divide quindi la somma ottenuta per la somma delle cifre del numero dato e si eleva al quadrato il risultato. Che numero si ottiene?

[Olimpiadi della matematica 2002]

E. In un trapezio rettangolo l'altezza misura x e la base minore è pari alla sua metà. Il lato obliquo misura $2y+1$, mentre la misura della base maggiore è uguale alla somma tra quella della base minore e del doppio dell'altezza. Esprimi con un polinomio ridotto la misura dell'area e del perimetro. In seguito calcola la misura dell'area e del perimetro per $x=\frac{5}{6}$ e $y=\frac{3}{4}$.

Soluzione

A. Sviluppa i seguenti prodotti notevoli:

$$\left(-\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{2}{3}x^2\right)^3=-\tfrac{1}{8}x^3y^3+\tfrac{8}{27}x^6+\tfrac{1}{2}x^4y^2-\tfrac{2}{3}x^5y$$

$$\left(\tfrac{2}{3}x^2-\tfrac{1}{4}xy^3+6y^4\right)^2=\tfrac{4}{9}x^4+\tfrac{1}{16}x^2y^6+36y^8-\tfrac{1}{3}x^3y^3+8x^2y^4-3xy^7$$

$$\left(a^{2n}b-\frac{1}{2}ab^n\right)^3=a^{6n}b^3-\frac{3}{2}a^{4n+1}b^{n+2}+\frac{3}{4}a^{2n+2}b^{2n+1}-\frac{1}{8}a^3b^{3n}$$

B. Semplifica le seguenti espressioni:

$$2(3x^2-4y)(3x^2+4y)-(3x^2-4y)^2 \quad = \quad 2(9x^4-16y^2)-(9x^4+16y^2-24x^2y)\ =$$
$$=\ 18x^4-32y^2-9x^4-16y^2+24x^2y\ =\ \ 9x^4-48y^2+24x^2y\,.$$

$$(p-1)^2\cdot(p+1)^2-(p^2-p-1)\cdot(p^2+p-1)\ =$$
$$=[(p-1)\cdot(p+1)]^2-[(p^2-1)-p]\cdot[(p^2-1)+p]\ =$$
$$=[p^2-1]^2-[(p^2-1)-p]\cdot[(p^2-1)+p]\ =$$
$$=[p^2-1]^2-[(p^2-1)^2-p^2]\ =$$
$$=[p^2-1]^2-[p^2-1]^2+p^2 \quad = \quad p^2\,.$$

C. Determina quoziente e resto della divisione: $(16x^5-6x^3+2x-1):(2x^3-5)$ ed effettua la verifica.

Soluzione

$$\begin{array}{ccccc|c}
16x^5 & -6x^3 & & +2x & -1 & 2x^3-5 \\ \cline{6-6}
-16x^5 & & 40x^2 & & & 8x^2-3 \\ \cline{1-5}
= & -6x^3 & 40x^2 & & & \\
 & +6x^3 & & & -15 & \\ \cline{2-5}
 & = & 40x^2 & +2x & -16 &
\end{array}$$

$$Q(x)=8x^2-3 \qquad\qquad R(x)=40x^2+2x-16$$

Verifica

$$Quoziente\ \cdot\ Divisore\ +Resto\ \ =\ \ Dividendo$$

$$(8x^2-3)\cdot(2x^3-5)+40x^2+2x-16 \quad =$$
$$=\ \ 16x^5-40x^2-6x^3+15+40x^2+2x-16\ \ =$$
$$=\ \ 16x^5-6x^3+2x-1\ \ .$$

$$(x^4-81):(x^2+9)=x^2-9$$

Senza effettuare la divisione, basta applicare il prodotto notevole: $(I+II)\cdot(I-II)=I^2-II^2$

$(8x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 1) : (2x + 4)$

<u>Soluzione</u>

Dividendo tutti i termini per 2 si ha:

$\left(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}\right) : (x + 2)$ Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 4 & -3 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & & -8 & +22 & -40 & +80 \\ \hline & 4 & -11 & +20 & -40 & \frac{159}{2} \end{array}$$

$$Q = 4x^3 - 11x^2 + 20x - 40 \qquad R = \frac{159}{2} \cdot 2 = 159$$

Prova

$$Quoziente \cdot Divisore + Resto = Dividendo$$

$$(4x^3 - 11x^2 + 20x - 40) \cdot (2x + 4) + 159 =$$

$$= 8x^4 - 22x^3 + 40x^2 - 80x + 16x^3 - 44x^2 + 80x - 160 + 159 = 8x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 1 \ .$$

D. Un numero di due cifre viene sommato al numero ottenuto invertendo le sue cifre. Si divide quindi la somma ottenuta per la somma delle cifre del numero dato e si eleva al quadrato il risultato. Che numero si ottiene?

[Olimpiadi della matematica 2002]

<u>Soluzione</u>

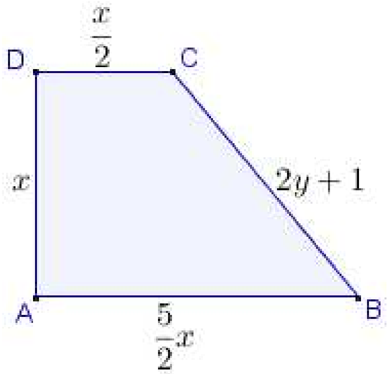
Ponendo: la cifra delle decine $= x$ e la cifra delle unità $= y$ si ottiene:

$$\left[\frac{(10x + y) + (10y + x)}{x + y}\right]^2 = \left[\frac{10x + y + 10y + x}{x + y}\right]^2 = \left[\frac{11x + 11y}{x + y}\right]^2 = [11]^2 = 121$$

A lato è stata eseguita la divisione fra due polinomi, perché la fattorizzazione dei polinomi non è stata ancora trattata.

$$\begin{array}{cc|l} 11x & +11y & x + y \\ \cline{3-3} -11x & -11y & 11 \\ \hline = & = & \end{array}$$

E. In un trapezio rettangolo l'altezza misura x e la base minore è pari alla sua metà. Il lato obliquo misura $2y + 1$, mentre la misura della base maggiore è uguale alla somma tra quella della base minore e del doppio dell'altezza. Esprimi con un polinomio ridotto la misura dell'area e del perimetro. In seguito calcola la misura dell'area e del perimetro per $x = \frac{5}{6}$ e $y = \frac{3}{4}$.



$$\begin{cases} \overline{AD} = x \\ \overline{DC} = \frac{x}{2} \\ \overline{BC} = 2y + 1 \\ \overline{AB} = \frac{x}{2} + 2x = \frac{5}{2}x \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD} = \frac{5}{2}x + 2y + 1 + \frac{x}{2} + x = 4x + 2y + 1$$

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}x + \frac{x}{2}\right) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x = \frac{3}{2}x^2$$

$$p\left(x = \frac{5}{6} \ ; \ y = \frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{10}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{20+9+6}{6} = \frac{35}{6} \ .$$

$$S\left(x = \frac{5}{6} \ ; \ y = \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{24} \ .$$