

Prova di Matematica: **Insiemi e logica**

Alunno: _____

20.11.2014
prof. Mimmo Corrado
Tempo 60 minuti

- Dati gli insiemi $A = \{x \in N / x = 2n + 1 \wedge n < 5 \wedge n \in N\}$, $B = \{x \in N / 1 < x \leq 6\}$
 $C = \{x \in N / x = 3n \wedge 0 < n \leq 4 \wedge n \in N\}$ definiti nell'insieme universo N , dopo averli rappresentati con un unico diagramma di Eulero-Venn, determina: $A \Delta B$ $\bar{A} \cap (B \cup C)$.
- Nella prossima settimana 26 studenti dovranno essere interrogati in italiano, matematica e fisica. Si sa che 16 di essi dovranno essere interrogati in italiano, 16 in fisica, 14 in matematica, 7 in italiano e in fisica, 10 in matematica e in fisica, 8 in italiano e in matematica. Quanti studenti dovranno essere interrogati in tutte e tre le discipline.
- Determina le negazioni delle seguenti proposizioni:
p: "qualche volta dopo pranzo ho sonnolenza" q: "se vado a Roma, visiterò la basilica di San Pietro"
- Stabilisci se il seguente ragionamento è corretto:
Se esco, vado in piazza
Se vado in piazza, incontro gli amici
Non incontro gli amici
Non esco
- Cinque persone non si trovano d'accordo sulla data.
Carlo dice che oggi è lunedì 16 agosto Franco dice che oggi è martedì 16 agosto
Marco dice che oggi è martedì 17 settembre Roberto dice che oggi è lunedì 17 agosto
Tullio dice che oggi è lunedì 17 settembre.
Uno ha ragione, ma nessuno ha "completamente" torto, nel senso che ciascuno dice correttamente almeno una cosa (o il giorno della settimana, o il giorno del mese, o il mese). Chi ha ragione? *[Olimpiadi della matematica - 1996]*

Soluzione

1. Dati gli insiemi $A = \{x \in N / x = 2n + 1 \wedge n < 5 \wedge n \in N\}$, $B = \{x \in N / 1 < x \leq 6\}$
 $C = \{x \in N / x = 3n \wedge 0 < n \leq 4 \wedge n \in N\}$ definiti nell'insieme universo N , dopo averli rappresentati con un unico diagramma di Eulero-Venn, determina: $A \Delta B$ $\bar{A} \cap (B \cup C)$

Soluzione

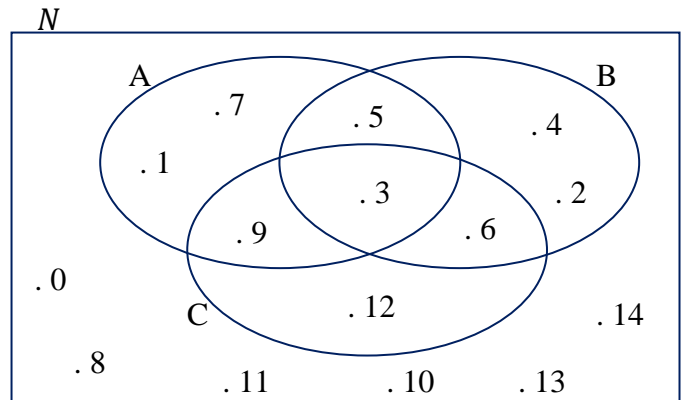
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$A \Delta B = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$$

$$\bar{A} \cap (B \cup C) = \{2, 4, 6, 12\}$$

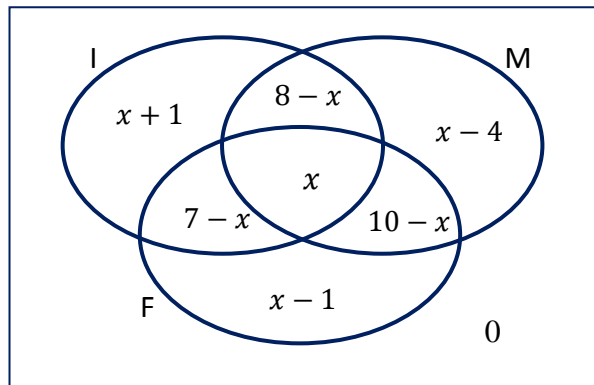


2. Nella prossima settimana 26 studenti dovranno essere interrogati in italiano, matematica e fisica. Si sa che 16 di essi dovranno essere interrogati in italiano, 16 in fisica, 14 in matematica, 7 in italiano e in fisica, 10 in matematica e in fisica, 8 in italiano e in matematica. Quanti studenti dovranno essere interrogati in tutte e tre le discipline.

Soluzione

$$\text{Dati } \begin{cases} |U| = 26 \\ |I \cup M \cup F| = 0 \\ |I| = 16 \\ |F| = 16 \\ |M| = 14 \\ |I \cap F| = 7 \\ |M \cap F| = 10 \\ |I \cap M| = 8 \end{cases}$$

$$|U| = 26$$



$$|I \cap M \cap F| = ?$$

Poniamo $|I \cap M \cap F| = x$.

$$\text{Si ottiene: } |(I \cap F) - M| = 7 - x \qquad |(M \cap F) - I| = 10 - x \qquad |(I \cap M) - F| = 8 - x$$

$$|I - (M \cup F)| = |I| - |(I \cap M) - F| - |(I \cap F) - M| - |I \cap M \cap F| = 16 - (8 - x) - (7 - x) - x = x + 1$$

$$|M - (I \cup F)| = |M| - |(I \cap M) - F| - |(M \cap F) - I| - |I \cap M \cap F| = 14 - (8 - x) - (10 - x) - x = x - 4$$

$$|F - (I \cup M)| = |F| - |(I \cap F) - M| - |(M \cap F) - I| - |I \cap M \cap F| = 16 - (7 - x) - (10 - x) - x = x - 1$$

Ricordando che $|U| = 26$ si ottiene: $|I \cup M \cup F| + |\bar{I \cup M \cup F}| = 26$;

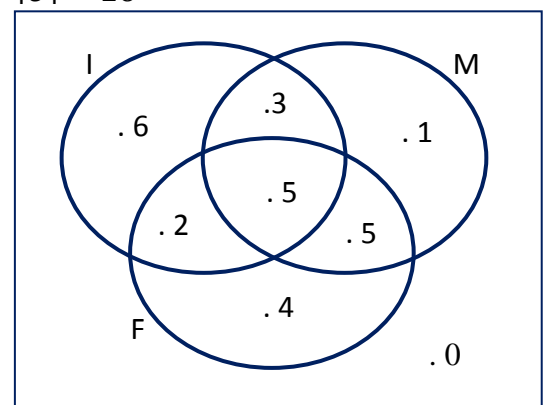
$$(x + 1) + (8 - x) + x + (7 - x) + (x - 4) + (10 - x) + (x - 1) + 0 = 26$$

$$x + 21 = 26$$

$$x = 5$$

Pertanto si conclude che 5 studenti dovranno essere interrogati in tutte e tre le discipline.

$$|U| = 26$$



3. Determina le negazioni delle seguenti proposizioni:

p : "qualche volta dopo pranzo ho sonnolenza"

\bar{p} : "Dopo pranzo non ho mai sonnolenza"

q : "se vado a Roma, visiterò la basilica di San Pietro"

\bar{q} : "vado a Roma e non visiterò la basilica di San Pietro"

4. Stabilisci se il seguente ragionamento è corretto:

Se esco, vado in piazza
 Se vado in piazza, incontro gli amici
 Non incontro gli amici

 Non esco

Soluzione 1

Poniamo:

p : "esco"

q : "vado in piazza"

r : "incontro gli amici"

In simboli si ha:

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

\bar{r}

 \bar{p}

Il ragionamento è valido perché è la composizione di un sillogismo ipotetico e di un modus tollens.

$p \rightarrow q$
 $q \rightarrow r$

 $p \rightarrow r$ Sillogismo ipotetico

$p \rightarrow r$
 \bar{r}

 \bar{p} Modus tollens

Soluzione 2

Costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	\bar{r}	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \wedge \bar{r}$	\bar{p}
V	V	V	F	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

Nell'unico caso in cui le tre premesse sono vere, anche la conseguenza logica è vera. Pertanto il ragionamento è valido.

5. Cinque persone non si trovano d'accordo sulla data.

Carlo dice che oggi è lunedì 16 agosto

Marco dice che oggi è martedì 17 settembre

Tullio dice che oggi è lunedì 17 settembre.

Uno ha ragione, ma nessuno ha "completamente" torto, nel senso che ciascuno dice correttamente almeno una cosa (o il giorno della settimana, o il giorno del mese, o il mese). Chi ha ragione? [Olimpiadi della matematica - 1996]

Franco dice che oggi è martedì 16 agosto

Roberto dice che oggi è lunedì 17 agosto

Soluzione

Carlo	Marco	Tullio	Franco	Roberto
lunedì 16 agosto	martedì 17 settembre	lunedì 17 settembre	martedì 16 agosto	lunedì 17 agosto

Le affermazioni di Carlo e Marco non hanno alcun elemento in comune, pertanto se uno di loro avesse ragione, l'altro avrebbe "completamente" torto.

Le affermazioni di Franco e Tullio non hanno alcun elemento in comune, pertanto se uno di loro avesse ragione, l'altro avrebbe "completamente" torto.

Supponendo vera l'affermazione di Roberto, ognuno degli altri dice correttamente almeno una parte della data.

Si conclude pertanto, che ha ragione **Roberto**.