

Progressioni

Progressioni aritmetiche

Una **progressione aritmetica** è una successione numerica tale che la differenza tra ogni termine e il suo precedente è costante. Tale differenza costante è detta **ragione**, e si indica con **d**.

In una progressione aritmetica di ragione **d**, ogni termine è uguale al suo precedente aumentato della ragione.

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Una progressione aritmetica di ragione **d** è :

crescente	se $d > 0$
decrescente	se $d < 0$
costante	se $d = 0$

Esempio

La successione: 10, 15, 20, 25, 30, ... è una progressione aritmetica crescente di ragione 5.

Termine generale

Il termine generale di una progressione aritmetica è : $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Dimostrazione

In una progressione aritmetica la differenza tra ogni termine e quello precedente è uguale a **d**:

$$\begin{array}{r} \cancel{a_2} - a_1 = d \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} = d \\ \dots \\ \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} = d \\ a_n - \cancel{a_{n-1}} = d \\ \hline a_n - a_1 = (n - 1)d \end{array} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Sommando membro a membro le n-1 uguaglianze, si ha:

Esempio

Dati: $a_7 = 72$ e $d = 3$, calcola a_1 .

Soluzione

$$a_n = a_1 + (n - 1)d; \quad a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 3; \quad 72 = a_1 + 6 \cdot 3; \quad a_1 = 72 - 18; \quad a_1 = 54.$$

Relazione fra due termini di una progressione aritmetica

La relazione fra due termini di una progressione aritmetica è : $a_r = a_s + (r - s) \cdot d$

Dimostrazione

Applicando la formula del termine generale di una progressione aritmetica all'elemento **r** e all'elemento **s** si ha:

$$\begin{array}{r} a_r = a_1 + (r - 1)d \\ a_s = a_1 + (s - 1)d \\ \hline a_r - a_s = (r - 1)d - (s - 1)d \end{array} \Rightarrow a_r - a_s = rd - sd \quad a_r = a_s + (r - s)d$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:

Esempio

Dati: $a_7 = 39$ e $d = 7$, calcola a_3 .

Soluzione

$$a_r = a_s + (r - s)d; \quad a_7 = a_3 + (7 - 3) \cdot 7; \quad 39 = a_3 + 4 \cdot 7; \quad a_3 = 39 - 28; \quad a_3 = 11.$$

Inserimento di termini in una progressione aritmetica

Per inserire un numero qualsiasi di termini in una progressione aritmetica occorre:

1. determinare la ragione **d**
2. aggiungere ad ogni termine, a partire dal primo, la ragione.

Esempio

Determinare i termini intermedi di una progressione aritmetica di primo termine 10 e settimo termine 70 .

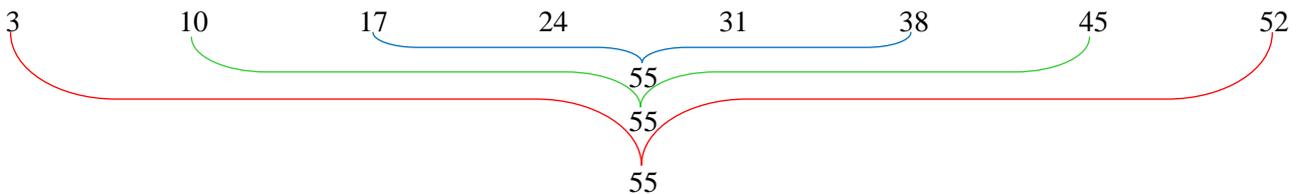
Soluzione

Determiniamo dapprima, la ragione della progressione aritmetica:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{70 - 10}{7 - 1} = 10 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 10; \quad a_2 = 10 + 10 = 20; \quad a_3 = 20 + 10 = 30; \dots$$

Teorema :

In una progressione aritmetica la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale alla somma dei termini estremi.



Dimostrazione

Indichiamo con x ed y due termini equidistanti dagli estremi e con k il numero dei termini che precedono x e seguono y . Si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} x = a_1 + c \cdot d & + & \\ y = a_n - c \cdot d & = & \text{Sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha:} \\ \hline x + y = a_1 + c \cdot d + a_n - c \cdot d & & x + y = a_1 + a_n \end{array}$$

La somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica

La somma dei primi n termini della progressione aritmetica è :

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Dimostrazione

Scriviamo la somma dei primi n termini della progressione aritmetica prima in ordine crescente e poi in ordine decrescente:

$$\begin{array}{rcl} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n & + & \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 & = & \text{Sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha:} \end{array}$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$\text{Per il teorema precedente } (a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \dots = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1) \quad \Rightarrow$$

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Esempio

Determinare la somma dei primi 12 termini della progressione aritmetica avente come primo termine 1 e ragione 2.

Soluzione

Determiniamo dapprima, il termine $a_{12} = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (12 - 1) \cdot 2 = 1 + 22 = 23$

In seguito si può determinare la somma: $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad \Rightarrow \quad S_{12} = 12 \cdot \frac{1+23}{2} = 6 \cdot 24 = 144$.

Progressioni geometriche

Una **progressione geometrica** è una successione numerica tale che il quoziente tra ogni termine e il suo precedente è costante. Tale rapporto costante è detto **ragione**, e si indica con **q**.

In una progressione aritmetica di ragione **q** ($q \neq 0$), ogni termine è uguale al suo precedente moltiplicato per la ragione.

$$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

In una progressione geometrica :

- \oplus se $q > 0$ i termini sono tutti o positivi o negativi
- \oplus se $q < 0$ i termini sono di segno alternato

Una progressione geometrica di ragione q è :

{	crescente	$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } q > 1 \text{ e i termini sono positivi} \\ \text{oppure} \\ \text{se } 0 < q < 1 \text{ e i termini sono negativi} \end{array} \right.$
	decescente	$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } 0 < q < 1 \text{ e i termini sono positivi} \\ \text{oppure} \\ \text{se } q > 1 \text{ e i termini sono negativi} \end{array} \right.$
	costante	$\text{se } q = 1$

Termine generale

Il termine generale di una progressione geometrica è : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ con $n \geq 1$

Dimostrazione

In una progressione aritmetica ogni termine è uguale al prodotto del precedente per la ragione **q** :

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad +$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

...

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$\frac{a_n = a_{n-1} \cdot q}{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-1}}$$

Moltiplicando membro a membro le n-1 uguaglianze, si ha:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Esempio

Dati: $a_5 = -8$ e $a_1 = -\frac{1}{2}$, calcola q .

Soluzione

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}; \quad -8 = -\frac{1}{2} \cdot q^4; \quad q^4 = 16; \quad q = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2.$$

Relazione fra due termini di una progressione geometrica

La relazione fra due termini di una progressione geometrica è :

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

Dimostrazione

Applicando la formula del termine generale di una progressione aritmetica all'elemento r e all'elemento s si ha:

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1} \quad -$$

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \quad = \quad \text{Dividendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:}$$

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1 \cdot q^{r-1}}{a_1 \cdot q^{s-1}} \quad \frac{a_r}{a_s} = \frac{q^{r-1}}{q^{s-1}}; \quad \frac{a_r}{a_s} = \frac{q^r}{q^s}; \quad a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

Esempio

Dati: $a_6 = 13$ e $q = 3$, calcola a_2 .

Soluzione

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}; \quad a_6 = a_2 \cdot 3^{6-2}; \quad 13 = a_2 \cdot 3^4; \quad a_2 = \frac{13}{81}.$$

Inserimento di termini in una progressione geometrica

Per inserire un numero qualsiasi di termini in una progressione geometrica occorre:

1. determinare la ragione q
2. moltiplicare ogni termine, a partire dal primo, per la ragione.

Esempio

Determinare i termini intermedi di una progressione geometrica avente come primo termine 10 e come quinto termine 160.

Soluzione

Determiniamo dapprima, la ragione della progressione aritmetica:

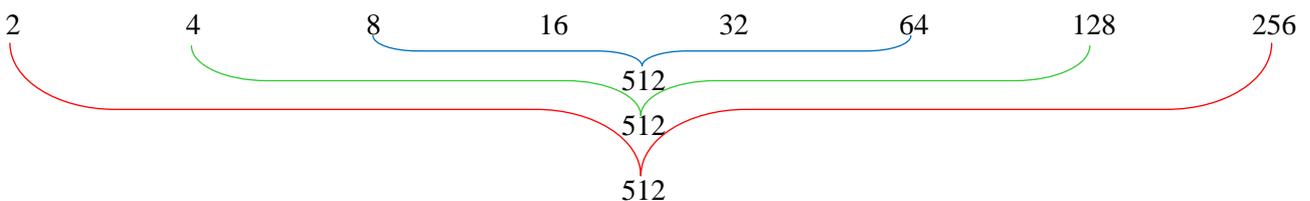
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \quad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}; \quad 160 = 10 \cdot q^4; \quad q^4 = 16; \quad q = 2.$$

In seguito si possono determinare i termini intermedi:

$$a_2 = 10 \cdot 2 = 20; \quad a_3 = 20 \cdot 2 = 40; \quad a_4 = 40 \cdot 2 = 80.$$

Teorema :

In una progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale al prodotto dei termini estremi.



Dimostrazione

Indichiamo con x ed y due termini equidistanti dagli estremi e con k il numero dei termini che precedono x e seguono y . Si ottiene:

$$x = a_1 \cdot q^c \quad +$$

$$y = \frac{a_n}{q^c} \quad =$$

Moltiplicando membro a membro le due uguaglianze, si ha:

$$x \cdot y = a_1 \cdot q^c \cdot \frac{a_n}{q^c}$$

$$x \cdot y = a_1 \cdot a_n$$

Il prodotto di termini consecutivi di una progressione geometrica

Il prodotto dei primi n termini della progressione geometrica è :

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Dimostrazione

Scriviamo il prodotto dei primi n termini della progressione aritmetica prima in ordine crescente e poi in ordine decrescente:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad +$$

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \quad = \quad \text{Moltiplicando membro a membro le due uguaglianze, si ha:}$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

$$\text{Per il teorema precedente } (a_1 \cdot a_n) = (a_2 \cdot a_{n-1}) = \dots = (a_{n-1} \cdot a_2) = (a_n \cdot a_1) \quad \Rightarrow$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \Rightarrow \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Esempio

Determinare il prodotto dei primi 4 termini della progressione geometrica avente come primo termine 5 e ragione 2.

Soluzione

Determiniamo dapprima, il termine $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = 5 \cdot 2^3 = 40$

In seguito si può determinare il prodotto: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \Rightarrow P_n = \sqrt{(5 \cdot 40)^4} = \sqrt{200^4} = 200^2 = 40000$.

La somma di termini consecutivi di una progressione geometrica

La somma dei primi n termini della progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ è :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dimostrazione

La somma dei primi n termini della progressione geometrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \text{Poiché } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad - \quad \text{Moltiplicando entrambi i membri per } q \quad \Rightarrow$$

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n \quad = \quad \text{Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:}$$

$$S_n \cdot q - S_n = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \dots + a_1 \cdot q^n - a_1 - \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q^2} - \dots - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

Dividendo per $q - 1 \neq 0$ si ha:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Esempio

Determinare la somma dei primi 6 termini della progressione geometrica avente come primo termine 5 e ragione 2.

Soluzione

Determiniamo dapprima, il termine $a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 5 \cdot 2^5 = 160$

In seguito si può determinare la somma: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S_6 = 5 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 5 \cdot 63 = 315$.