

## Equazioni con un valore assoluto

**I TIPO**      $|f(x)| = k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists x \in \mathbf{R} \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -k \quad \vee \quad f(x) = +k \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se } k < 0 \\ \text{se } k = 0 \\ \text{se } k > 0 \end{array}$

Esempi

1.  $|3x - 5| = -2 \quad \exists x \in \mathbf{R}$

2.  $|3x - 5| = 0 \quad 3x - 5 = 0; \quad x = \frac{5}{3}$

3.  $|3x - 5| = +2$

$$3x - 5 = -2 \quad \vee \quad 3x - 5 = +2$$

cioè:  $3x = 3 \quad \vee \quad 3x = 7$

cioè:  $x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{7}{3}$

Oppure

$$\begin{cases} 3x - 5 < 0 \\ -(3x - 5) = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ +(3x - 5) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x < 5 \\ -3x = -5 + 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x \geq 5 \\ 3x = 5 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è  $S = \left\{ \frac{7}{3}; 1 \right\}$

**II TIPO**      $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ +f(x) = g(x) \end{cases}$

Esempio

$$|x + 1| = 2x$$

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ -(x + 1) = 2x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ +(x + 1) = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x = -\frac{1}{3} \text{ non accettabile} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è  $S = \{1\}$

## Disequazioni con un valore assoluto

### I TIPO

$$|f(x)| < k \quad (\text{con } k > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases} \quad \begin{array}{c} -k \quad f(x) \quad k \\ \text{-----} \circ \text{-----} \circ \text{-----} \end{array}$$

$$|f(x)| > k \quad (\text{con } k > 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < -k \quad \vee \quad f(x) > k \quad \begin{array}{c} f(x) \quad -k \quad \quad \quad k \quad f(x) \\ \text{-----} \circ \text{-----} \circ \text{-----} \end{array}$$

Esempi

$$1. \quad |x-3| < 5 \quad \begin{cases} x-3 < 5 \\ x-3 > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8 \\ x > -2 \end{cases} \quad \text{la soluzione è:} \quad -2 < x < 8.$$

$$2. \quad |x-3| > 5 \quad x-3 < -5 \quad \vee \quad x-3 > 5 \quad \text{la soluzione è:} \quad x < -2 \quad \vee \quad x > 8$$

### II TIPO

$$|f(x)| < k \quad (\text{con } k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \nexists x \in R \quad |f(x)| > k \quad (\text{con } k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in R$$

$$|f(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \neq 0$$

$$|f(x)| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in R$$

$$|f(x)| < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nexists x \in R$$

$$|f(x)| \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

Esempi

$$1. \quad |2x-4| < -5 \quad \nexists x \in R$$

$$2. \quad |2x-4| > -5 \quad \forall x \in R$$

$$3. \quad |2x-4| > 0 ; \quad 2x-4 \neq 0 ; \quad x \neq 2$$

$$4. \quad |2x-4| \geq 0 \quad \forall x \in R$$

$$5. \quad |2x-4| < 0 ; \quad \nexists x \in R$$

$$6. \quad |2x-4| \leq 0 \quad 2x-4 = 0 ; \quad x = 2$$

$$\text{III TIPO} \quad |f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ +f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ +f(x) > g(x) \end{cases}$$

*Esempio*

$$|x-3| < 2x-8 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ -(x-3) < 2x-8 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 < 2x-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x > \frac{11}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$\emptyset \quad \vee \quad x > 5$$

L'insieme delle soluzioni è dato da:  $x > 5$ .