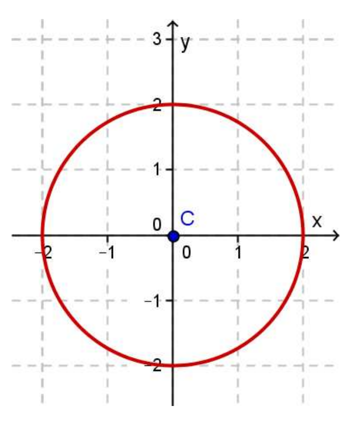
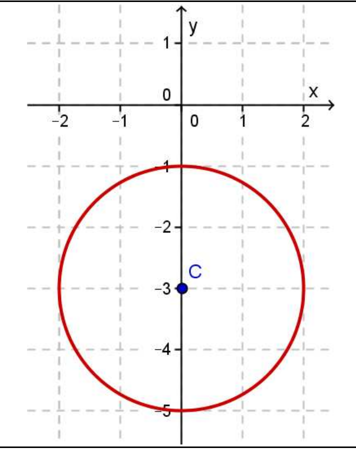
Prova di Matematica : Circonferenza

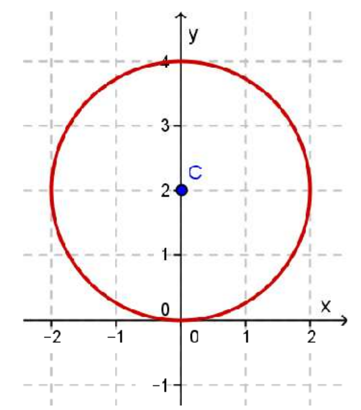
Durata della prova: 75 min

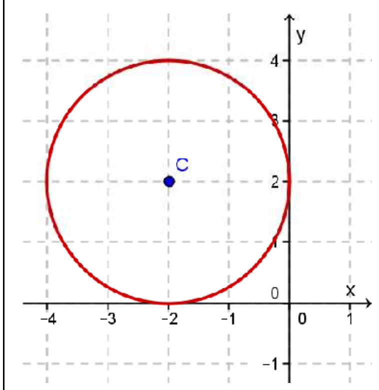
Alunno: ____ Classe: LS 3C

1. Determina l'equazione di ciascuna circonferenza.









2. Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 + y^2 - 4|x| - 4y = 0$

3. Studia il fascio di circonferenze $(1+k)x^2 + (1+k)y^2 - 4(k+4)x - 6ky + 3(k+13) = 0$

4. Dopo aver trovato l'equazione della circonferenza passante per $A(1\,;2)$ e $B(-1\,;-2)$ e il cui centro C appartiene alla retta $3x - y - 14 = 0$, determina:
   a. le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla circonferenza in A e in B rispettivamente, verificando che il punto P d'intersezione tra t_1 e t_2 appartiene all'asse del segmento AB;
   b. l'area del quadrilatero $CAPB$;
   c. detti E e F i punti di ascissa 1 che hanno distanza uguale a 4 da t_1, l'area del triangolo EFC.

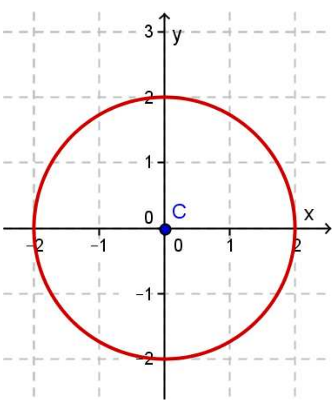
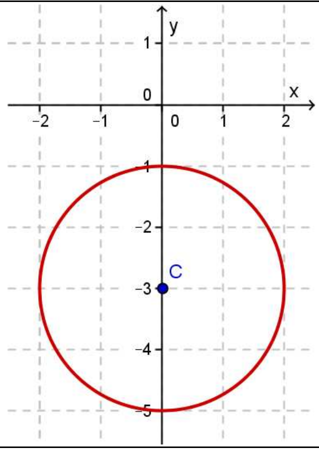
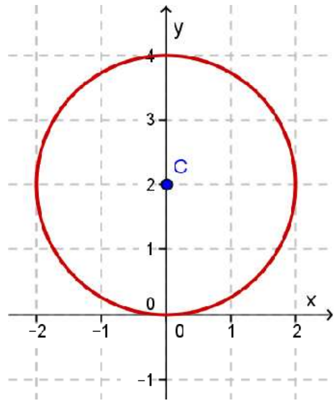
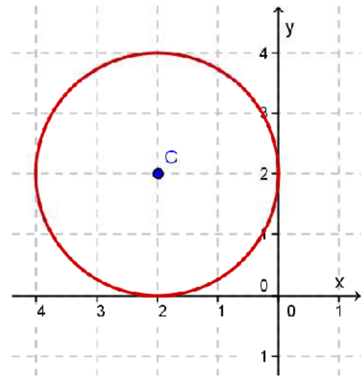
Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	Totale
	Punti	10	14	18	28	70

1.

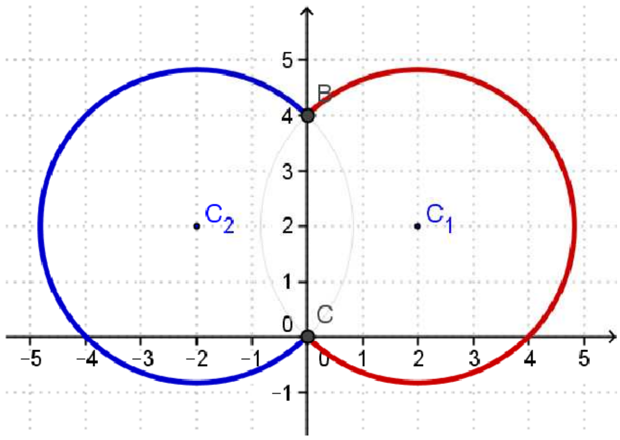
Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*9½*	*10*

Soluzione

1. Determina l'equazione di ciascuna circonferenza.

			
$x^2+y^2=4$	$x^2+(y+3)^2=4$	$x^2+(y-2)^2=4$	$(x+2)^2+(y-2)^2=4$

2. Traccia il grafico della curva di equazione:
$$x^2+y^2-4|x|-4y=0$$



$$x^2+y^2-4|x|-4y=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+y^2-4x-4y=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2+y^2+4x-4y=0 \end{cases}$$

$C_1(2\,;2) \qquad r=\sqrt{2^2+2^2-0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$C_2(-2\,;2) \qquad r=\sqrt{(-2)^2+2^2-0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

3. Studia il fascio di circonferenze $(1+k)x^2+(1+k)y^2-4(k+4)x-6ky+3(k+13)=0$

A. FORMA CANONICA

Dividiamo tutti i termini per $1+k\neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2-\frac{4(k+4)}{1+k}x-\frac{6k}{1+k}y+\frac{3(k+13)}{1+k}=0$

B. COORDINATE DEI CENTRI

$$C\left(\frac{2(k+4)}{1+k}\,;\,\frac{3k}{1+k}\right)$$

C. MISURA DEL RAGGIO

$$r=\sqrt{\left(\frac{2(k+4)}{1+k}\right)^2+\left(\frac{3k}{1+k}\right)^2-\frac{3(k+13)}{1+k}}=\sqrt{\frac{4k^2+64+32k}{(1+k)^2}+\frac{9k^2}{(1+k)^2}-\frac{3k+39}{1+k}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4k^2+64+32k+9k^2-(3k+39)(1+k)}{(1+k)^2}}=\sqrt{\frac{4k^2+64+32k+9k^2-3k-3k^2-39-39k}{(1+k)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10k^2-10k+25}{(1+k)^2}}=\frac{\sqrt{10k^2-10k+25}}{|1+k|}$$

Tale espressione è reale quando $10k^2-10k+25\ge 0 \qquad \frac{\Delta}{4}=25-250=-225 \qquad \forall k\in R$

D. GENERATRICI

$(1+k)x^2+(1+k)y^2-4(k+4)x-6ky+3(k+13)=0\,;$

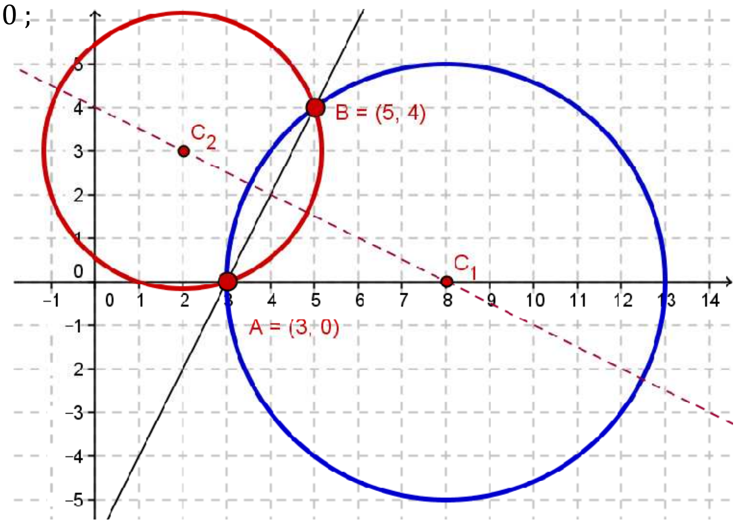
$x^2+kx^2+y^2+ky^2-4kx-16x-6ky+3k+39=0\,;$

$x^2+y^2-16x+39+k\cdot(x^2+y^2-4x-6y+3)=0\,;$

Le due circonferenze generatrici sono:

per $k=0$ $\qquad x^2+y^2-16x+39=0$

per $k\to\infty$ $\qquad x^2+y^2-4x-6y+3=0$



E. ASSE RADICALE

$$
\begin{array}{rl}
x^2+y^2-16x+39=0 & - \\
x^2+y^2-4x-6y+3=0 & = \\
\hline
-12x+6y+36=0\,; &
\end{array}
$$

$2x-y-6=0$ Asse Radicale

F. PUNTI BASE

$\begin{cases} x^2+y^2-16x+39=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^2+(2x-6)^2-16x+39=0 \\ y=2x-6 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^2+4x^2+36-24x-16x+39=0 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} 5x^2-40x+75=0 \\ - \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^2-8x+15=0 \\ - \end{cases}$ $\quad\frac{\Delta}{4}=16-15=1$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{4\pm\sqrt{1}}{1}=$$

$x_1=\ 4-1=3$ $\qquad\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=2\cdot3-6=0 \end{cases}\ \rightarrow\ A(3;0)$

$x_2=4+1=5$ $\qquad\begin{cases} x_2=5 \\ y_1=2\cdot5-6=4 \end{cases}\ \rightarrow\ B(5;4)$

G. ASSE CENTRALE

L’asse centrale è la retta che passa per i centri delle circonferenze.

La circonferenza $x^2+y^2-16x+39=0$ ha centro in $C_1(8\,;0)$

La circonferenza $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ ha centro in $C_2(2\,;3)$

L’equazione dell’asse centrale è:

$\frac{y-0}{3-0}=\frac{x-8}{2-8}\,;$ $\qquad\frac{y}{3}=\frac{x-8}{-6}\,;$ $\qquad-6y=3(x-8)\,;$ $\qquad-6y=3x-24\,;$

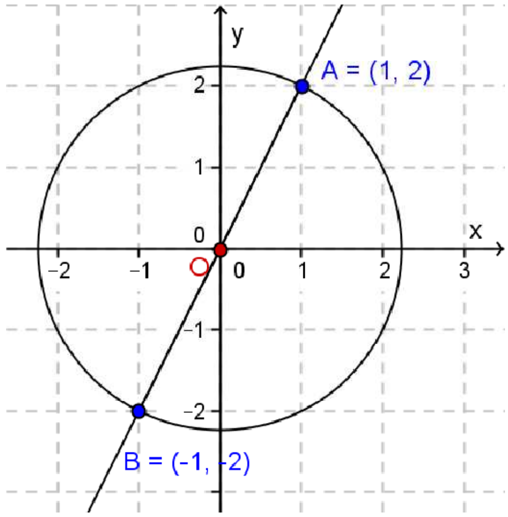
$y=-\frac{1}{2}x+4\,;$

4. Dopo aver trovato l’equazione della circonferenza passante per $A(1\,;2)$ e $B(-1\,;-2)$ e il cui centro C appartiene alla retta $3x-y-14=0$, determina:

a. le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla circonferenza in A e in B rispettivamente, verificando che il punto P d’intersezione tra t_1 e t_2 appartiene all’asse del segmento AB;

b. b. l’area del quadrilatero $CAPB$;

c. detti E e F i punti di ascissa 1 che hanno distanza uguale a 4 da t_1, l’area del triangolo EFC.



Soluzione

Determiniamo l’equazione del fascio di circonferenze passante per i punti base A e B.

Come prima circonferenza del fascio consideriamo la circonferenza di diametro AB.

$$x_C=\frac{1-1}{2}=0 \qquad y_C=\frac{2-2}{2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad C(0\,;\,0) \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2=5$$

$$r=\overline{AC}=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$$

Come seconda circonferenza del fascio consideriamo la circonferenza degenere (raggio infinito), asse radicale AB.

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}\,; \qquad x=\frac{y}{2}\,; \qquad 2x=y\,; \qquad 2x-y=0$$

Il fascio di circonferenze passante per i punti base A e B si ottiene combinando linearmente le due equazioni trovate:

$x^2+y^2-5+k(2x-y)=0$.

L’equazione del fascio, scritta in forma canonica, è:

$$x^2+y^2-5+2kx-ky=0\,; \qquad x^2+y^2+2kx-ky-5=0\,.$$

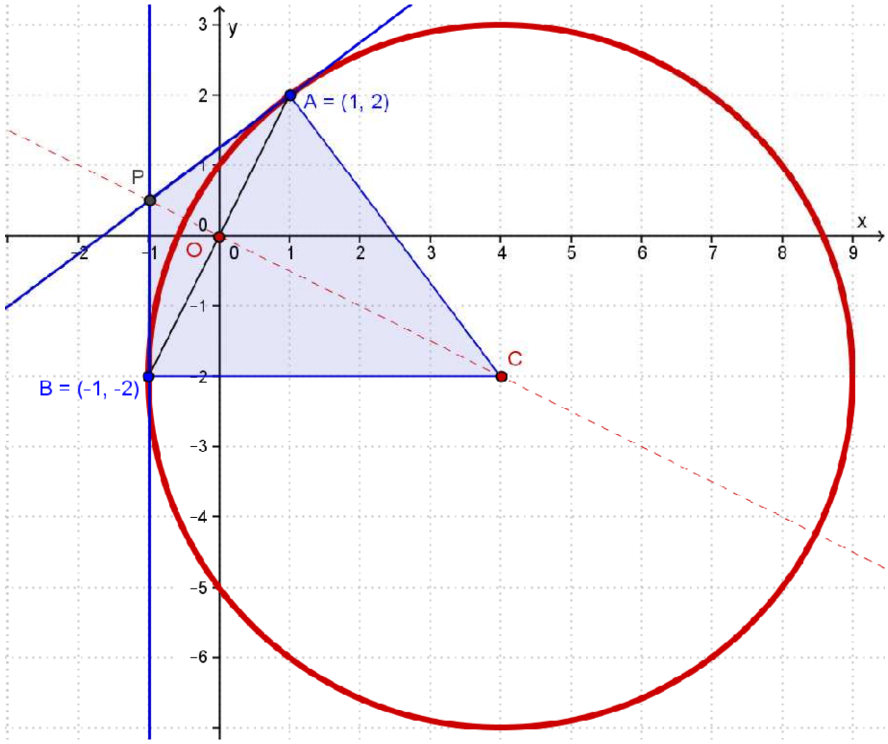
Il cui centro ha coordinate: $C\left(-k\,;\,\frac{k}{2}\right)$

Imponendo che il centro C appartenga alla retta $3x-y-14=0$ si ottiene:

$$3\cdot(-k)-\frac{k}{2}-14=0\,; \qquad 3k+\frac{k}{2}+14=0\,; \qquad 6k+k+28=0\,; \qquad 7k=-28\,; \qquad k=-4\,.$$

Per cui l’equazione della circonferenza richiesta è:

$$x^2+y^2+2\cdot(-4)x-(-4)y-5=0\,; \qquad x^2+y^2-8x+4y-5=0$$



a) Applicando le formule di sdoppiamento si ha:

$t_1: \quad x \cdot 1 + y \cdot 2 - 8 \cdot \frac{x+1}{2} + 4 \cdot \frac{y+2}{2} - 5 = 0\,; \qquad x + 2y - 4(x+1) + 2(y+2) - 5 = 0\,;$

$x + 2y - 4x - 4 + 2y + 4 - 5 = 0\,; \qquad -3x + 4y - 5 = 0\,; \qquad 3x - 4y + 5 = 0$

$t_2: \quad x \cdot (-1) + y \cdot (-2) - 8 \cdot \frac{x-1}{2} + 4 \cdot \frac{y-2}{2} - 5 = 0\,; \qquad -x - 2y - 4(x-1) + 2(y-2) - 5 = 0\,;$

$-x - 2y - 4x + 4 + 2y - 4 - 5 = 0\,; \qquad -5x - 5 = 0\,; \qquad x + 1 = 0$

Il punto di intersezione P delle due tangenti t_1 e t_2 ha coordinate:

$\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot (-1) - 4y + 5 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 - 4y + 5 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\right)$

Il punto P appartiene all'asse del segmento AB se esso è equidistante dagli estremi del segmento AB. Calcoliamo pertanto:

$\overline{PA} = \sqrt{(1+1)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \qquad$ e $\qquad \overline{PB} = \left|\frac{1}{2} + 2\right| = \left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$

b) L'area del deltoide $CAPB$ è data da: $S_{CAPB} = \frac{\overline{PC} \cdot \overline{AB}}{2}$

$\overline{PC} = \sqrt{(4+1)^2 + \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad S_{CAPB} = \frac{\overline{PC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{25}{2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) Il punto E ha coordinate $E(1\,;k)$

Imponiamo che la sua distanza dalla retta $3x - 4y + 5 = 0$ sia uguale a 4.

$\frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot k + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4\,; \qquad \frac{|3 - 4k + 5|}{\sqrt{25}} = 4\,;$

$\frac{|8 - 4k|}{5} = 4\,; \qquad |8 - 4k| = 20\,;$

$\begin{matrix} 8 - 4k = -20 & k = +7 \\ 8 - 4k = +20 & k = -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad E(1\,;7) \quad F(1\,;-3)$

L'area del triangolo EFC è data da: $S_{CAPB} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{CH}}{2}$

$\overline{EF} = |7 + 3| = 10$

$\overline{CH} = |4 - 1| = 3 \quad \Rightarrow \quad S_{CAPB} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15\,.$