Prova di Matematica : Disequazioni

19.10.2013
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 3 C

Durata della prova: 60 minuti

1. Completa

$x^4 \dots 4 > 0 \qquad \forall x \in R$

$x^2 \dots 9 < 0 \qquad per\ -3 < x < 3$

$(2x+6)^6 \leq 0 \qquad per\ \dots$

$(3x+9)^9 \leq 0 \qquad per\ \dots$

2. Risolvi le seguenti disequazioni senza svolgere calcoli.

Traccia	Soluzione
$5 + \lvert 2x-6 \rvert = 3$	
$\lvert 2x-6 \rvert + 5 < 1 - \lvert 2x \rvert$	
$4 + \sqrt[4]{4+4x} = 0$	
$\lvert 2x-6 \rvert \leq 0$	

3. Risolvi le seguenti disequazioni :

$x^6 \geq 3x^3 - 20$

$2x^{10} + 6x^9 - 6x^8 - 18x^7 - 8x^6 - 24x^5 \leq 0$

$\frac{|x| + |x-1|}{x^2 - 1} \geq 0$

$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+5} = -3$

4. Anna si reca a scuola, che dista 2 km dalla sua abitazione, in bicicletta. Pedala a velocità costante per la metà del tragitto; poi, siccome si accorge di essere in ritardo, percorre la seconda metà del tragitto a una velocità superiore di 4 km/h a quella iniziale. Complessivamente, Anna impiega meno di 12 minuti e 30 secondi per arrivare a scuola. Che cosa si può dire della velocità iniziale di Anna ?

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	Totale
	Punti	4	8	10+14+10+14	20	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

1. Completa

$x^4 + 4 > 0 \qquad \forall x \in R$

$x^2 - 9 < 0 \qquad per \; -3 < x < 3$

$(2x+6)^6 \leq 0 \qquad per \;\; x = -3$

$(3x+9)^9 \leq 0 \qquad per \;\; x \leq -3$

2. Risolvi le seguenti disequazioni senza svolgere calcoli.

Traccia	Soluzione
$5 + \lvert 2x - 6 \rvert = 3$	$\nexists \; x \in R$
$\lvert 2x - 6 \rvert + 5 < 1 - \lvert 2x \rvert$	$\nexists \; x \in R$
$4 + \sqrt[4]{4 + 4x} = 0$	$\nexists \; x \in R$
$\lvert 2x - 6 \rvert \leq 0$	$x = 3$

2. Risolvi le seguenti disequazioni :

$x^6 \geq 3x^3 - 20$

$x^6 - 3x^3 + 20 \geq 0$

Si pone $\;x^3 = z \quad \Rightarrow \quad x^6 = z^2\;$ e si ottiene la disequazione: $\;z^2 - 3x + 20 \geq 0$.

Si risolve l'equazione $z^2 - 3z + 2 = 0$; $\qquad \Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = -71 < 0$

Pertanto la disequazione: $\quad z^2 - 3z + 2 \geq 0 \quad$ è verificata per $\;\forall z \in R$

Ma $\;z = x^3 \quad \Rightarrow\;$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $\;x^6 \geq 3x^3 - 20\;$ è l'insieme $\;R$.

$2x^{10} + 6x^9 - 6x^8 - 18x^7 - 8x^6 - 24x^5 \leq 0$

$2x^5 \cdot (x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 4x - 12) \leq 0$;

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & +3 & -3 & -9 & -4 & -12 \\
-3 & & -3 & 0 & +9 & 0 & +12 \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & 0 & -4 & =
\end{array}
$$

$2x^5 \cdot (x+3) \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) \leq 0$;

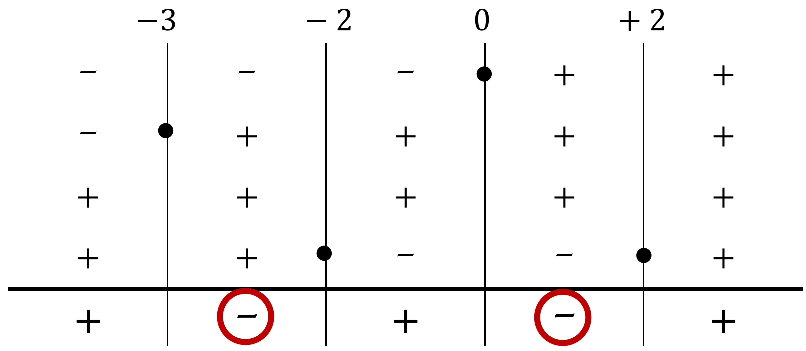
$2x^5 \cdot (x+3) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 4) \leq 0$;

$x^5 \geq 0 \qquad x \geq 0$

$x + 3 \geq 0 \qquad x \geq -3$

$x^2 + 1 \geq 0 \qquad \forall x \in R$

$x^2 - 4 \geq 0 \qquad x \leq -2 \;\;\vee\;\; x \geq 2$



La rappresentazione dell'insieme delle soluzioni sulla retta reale è

$-3 \leq x \leq -2 \quad \vee \quad 0 \leq x \leq 2 \qquad\qquad [-3, -2] \quad \cup \quad [\,0, 2]$

$$\frac{|x| + |x-1|}{x^2 - 1} \geq 0$$

$N \geq 0$: $\quad |x| + |x-1| \geq 0 \quad \forall x \in R \quad perch\grave{e}\ somma\ di\ quantit\grave{a}\ positive\ o\ nulle$

$D > 0$: $\quad x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \quad \vee \quad x > 1$

La rappresentazione dell'insieme delle soluzioni sulla retta reale è

$x < -1 \quad \vee \quad x \geq 1 \qquad\qquad]-\infty, -1] \quad \cup \quad [\,1, +\infty]$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+5} = -3$$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$$\sqrt{x+2} + 3 = 2\sqrt{x+5}$$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -5 \end{cases} \qquad x \geq -2 \quad (*)$

Sotto queste condizioni, elevando ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{x+2} + 3\right)^2 = \left(2\sqrt{x+5}\right)^2$; $\qquad x + 2 + 9 + 6\sqrt{x+2} = 4(x+5)$;

$6\sqrt{x+2} = 4x + 20 - x - 2 - 9$; $\qquad 6\sqrt{x+2} = 3x + 9$;

$2\sqrt{x+2} = x + 3$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $x + 3 \geq 0$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \left(2\sqrt{x+2}\right)^2 = (x+3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ 4(x+2) = x^2 + 9 + 6x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ 4x + 8 = x^2 + 9 + 6x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \end{cases} \qquad x = -1$

La soluzione $\boxed{\boldsymbol{x = -1}}$ è accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza $(*)$ $x \geq -2$.

4. Anna si reca a scuola, che dista $2\ km$ dalla sua abitazione, in bicicletta. Pedala a velocità costante per la metà del tragitto; poi, siccome si accorge di essere in ritardo, percorre la seconda metà del tragitto a una velocità superiore di $4\ km/h$ a quella iniziale. Complessivamente, Anna impiega meno di 12 minuti e 30 secondi per arrivare a scuola. Che cosa si può dire della velocità iniziale di Anna ?

<u>Soluzione</u>

Trasformiamo innanzitutto il tempo, espresso in minuti e secondi in ore:

$$12^{\mathrm{I}}\ 30^{\mathrm{II}} = \left(\frac{12}{60}\right)^h + \left(\frac{30}{3600}\right)^h = \left(\frac{1}{5}\right)^h + \left(\frac{1}{120}\right)^h = \left(\frac{1+24}{120}\right)^h = \left(\frac{25}{120}\right)^h = \left(\frac{5}{24}\right)^h$$

Ricordiamo poi che la $velocità = \frac{spazio}{tempo}$. Da essa si ricava il $tempo = \frac{spazio}{velocità}$.

Ponendo la velocità iniziale $v_i = x > 0$ si ha: $t_1 = \frac{1}{x}$ e $t_2 = \frac{1}{x+4}$

Siccome Anna impiega meno di 12 minuti e 30 secondi per arrivare a scuola, si ha:

$$t_1 + t_2 < \left(\frac{5}{24}\right)^h \ ; \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} < \frac{5}{24}\ ;$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} - \frac{5}{24} < 0\ ; \qquad \frac{24(x+4) + 24x - 5x(x+4)}{24x(x+4)} < 0\ ;$$

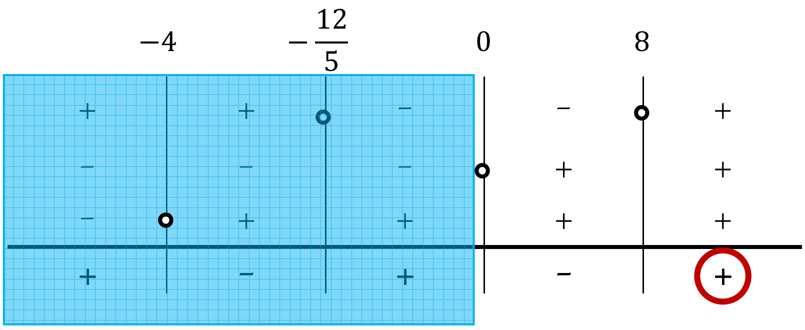
$$\frac{24x + 96 + 24x - 5x^2 - 20x}{24x(x+4)} < 0\ ; \qquad \frac{-5x^2 + 28x + 96}{24x(x+4)} < 0\ ;$$

$$\frac{-(5x^2 - 28x - 96)}{24x(x+4)} < 0\ ; \qquad \frac{5x^2 - 28x - 96}{24x(x+4)} > 0\ ;$$

$5x^2 - 28x - 96 > 0 \qquad x < -\frac{12}{5} \ \vee \ x > 8$

$24x > 0 \qquad x > 0$

$x + 4 > 0 \qquad x > -4$



Considerando la condizione iniziale $v_i = x > 0$ si ha: $x > 8$.

Pertanto la velocità iniziale di Barbara era maggiore di $8\ km/h$.

Risoluzione di $5x^2 - 28x - 96 > 0$;

$$5x^2 - 28x - 96 = 0\ ; \qquad x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196+480}}{5} = \frac{14 \pm 26}{5} = \begin{cases} x_1 = \frac{14-26}{5} = -\frac{12}{5} \\ x_2 = \frac{14+26}{5} = 8 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione $5x^2 - 28x - 96 > 0$ è $x < -\frac{12}{5} \ \vee \ x > 8$.