Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2013-2014

Prova di Matematica : Parabola

30.04.2014

prof. Mimmo Corrado

Durata della prova: $75\ min$

Alunno: ______________________________ Classe: LS 3C

1. Traccia il grafico della seguente funzione, determinandone: dominio, codominio e tipo. $$y = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{|x+1|}$$

2. Dopo aver determinato l'equazione della parabola γ, con asse parallelo all'asse x, passante per $A(0\,;1)$ e tangente nel punto B di ordinata -2 alla retta t_B: $x + 2y + 7 = 0$, rispondi ai seguenti quesiti:
   a. determina le equazioni della retta t_A tangente in A e della retta t_V tangente nel vertice V a γ e i vertici del triangolo LMN formato da t_A, t_B e t_V;
   b. determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo LMN e verifica che passa per il fuoco di γ;
   c. determina l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola γ e dall'asse y;
   d. detto P un punto, di ordinata s, dell'arco $\widehat{AB}$ di γ, considera la funzione $f(s) = \sqrt{5} \cdot \overline{PH} + \overline{PK}$ essendo $\overline{PH}$ e $\overline{PK}$ le distanze di P da t_B e dall'asse x; tracciarne il grafico, indicandone il minimo e il massimo.

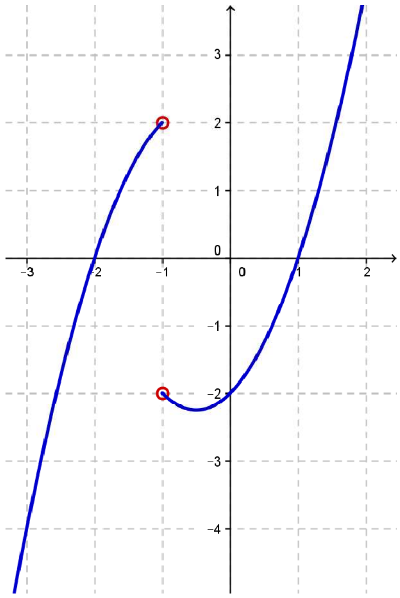
Valutazione	Esercizio	1	2.0	2.a	2.b	2.c	2.d	Totale
	Punti	10	10	15	13	7	15	70

1.

Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*9½*	*10*

Soluzione

Esercizio 1



$$y = \frac{x^3+2x^2-x-2}{|x+1|} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x^2+x-2)}{x+1} & se\ x+1>0 \\ \dfrac{(x+1)(x^2+x-2)}{-x-1} & se\ x+1<0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} +x^2+x-2 & se\ x>-1 \\ -x^2-x+2 & se\ x<-1 \end{cases}$$

Il dominio è $D =]-\infty, -1[\ \cup\ ]-1\,, +\infty[$
Il codominio è $C =]-\infty, +\infty[$
La funzione è suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio 2

La parabola è del tipo $x = ay^2 + by + c$.

Metodo 1

Imponendo il passaggio per il punto A$(0\,;1)$ si ottiene: $0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$ cioè $a+b+c=0$.

Sostituendo l'ordinata -2 nell'equazione della retta t_B: $x+2y+7=0$ si ottiene: $x + 2\cdot(-2)+7=0$ cioè $x=-3$.
Pertanto le coordinate del punto sono: $B(-3\,;-2)$.

Imponendo il passaggio per $B(-3\,;-2)$ si ottiene: $-3 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2)+c$ cioè $4a-2b+c=-3$

Da queste due equazioni otteniamo il fascio di parabole:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a-2b+c=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-a-b \\ 4a-2b-a-b=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ 3a-3b=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-a-a-1 \\ b=a+1 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-2a-1 \\ b=a+1 \end{cases}$$

l'equazione del fascio di parabole è: $x = ay^2 + (a+1)y - 2a - 1$.

Sfruttiamo la condizione di tangenza:

$$\begin{cases} x+2y+7=0 \\ x = ay^2+(a+1)y-2a-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y-7 \\ -2y-7 = ay^2+(a+1)y-2a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ ay^2+ay+y-2a-1+2y+7=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ ay^2+(a+3)y-2a+6=0 \end{cases}$$

Imponendo la condizione di tangenza si ha: $\Delta = 0$; $(a+3)^2 - 4a\cdot(-2a+6) = 0$;

$a^2+9+6a+8a^2-24a=0$; $9a^2-18a+9=0$; $9(a-1)^2=0$; $a-1=0$; $a=1$.

l'equazione della parabola γ è: $x = y^2+2y-3$.

Metodo 2

l'equazione del fascio di parabole tangenti alla retta t_B: $x+2y+7=0$ nel punto $B(-3\,;-2)$ ha equazione:

$t_B + k(y-y_B)^2 = 0$; $x+2y+7+k(y+2)^2=0$

Imponendo il passaggio per il punto A$(0\,;1)$ si ottiene:

$0+2\cdot 1+7+k(1+2)^2=0$; $9+9k=0$; $k=-1$.

Sostituendo tale valore nel fascio prima determinato si ottiene l'equazione della parabola γ :

$x+2y+7-1\cdot(y+2)^2=0$; $x+2y+7-y^2-4-4y=0$; $x=y^2+2y-3$.

Soluzione a

Determiniamo l'equazione della retta t_A tangente in A a γ :

Utilizzando le formule di sdoppiamento si ottiene:
$$x^2 \longrightarrow x_T\cdot x \qquad y^2 \longrightarrow y_T\cdot y$$
$$x \longrightarrow \frac{x_T+x}{2} \qquad y \longrightarrow \frac{y_T+y}{2}$$

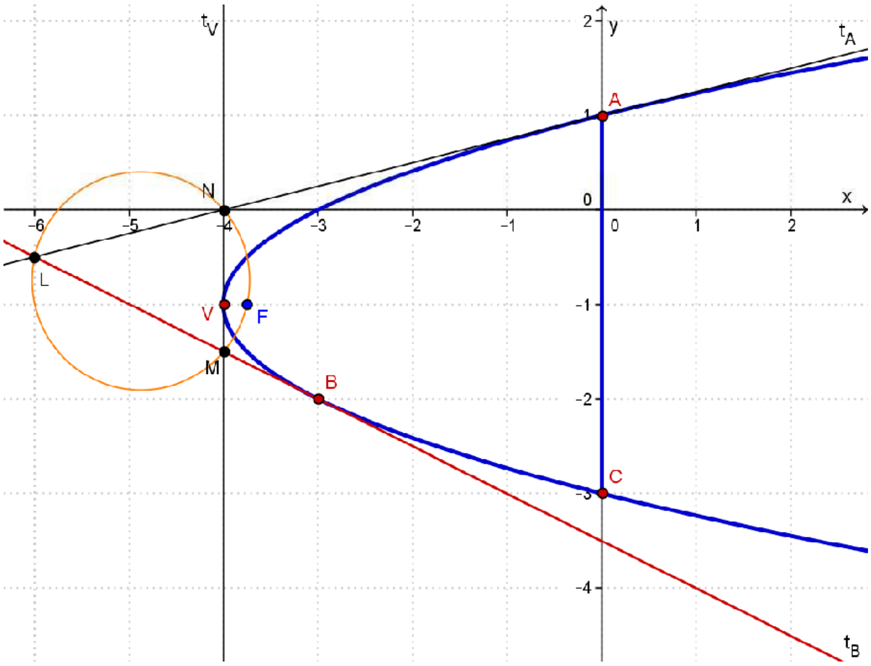
$$x = y^2+2y-3 \quad \longrightarrow \quad \frac{x_T+x}{2} = y_T\cdot y + 2\cdot\frac{y_T+y}{2} - 3$$

$$\frac{0+x}{2} = 1\cdot y + 2\cdot\frac{1+y}{2} - 3\,; \qquad \frac{x}{2} = y+1+y-3\,; \qquad 2y = \frac{x}{2}+2\,; \qquad y = \frac{x}{4}+1\,.$$

Determiniamo l'equazione della retta t_V tangente nel vertice V a γ :

$$y_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1\,; \qquad x_V = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 3 = -4\,; \qquad V(-4;-1)$$

L'equazione della retta t_V tangente nel vertice V a γ ha equazione: $x = -4$.



Determiniamo le coordinate dei vertici del triangolo LMN :

$$L:\ \begin{cases} t_A \\ t_B \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{x}{4} + 1 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \dfrac{x}{2} + 2 + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + x + 18 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{-6}{4} + 1 = -\dfrac{1}{2} \\ x = -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L\left(-6; -\frac{1}{2}\right)$$

$$M:\ \begin{cases} t_V \\ t_B \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 + 2y + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M\left(-4; -\frac{3}{2}\right)$$

$$N:\ \begin{cases} t_V \\ t_A \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = \dfrac{x}{4} + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{-4}{4} + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N(-4;0)$$

__Soluzione b__

Determiniamo l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo LMN :

$$\begin{cases} (-6)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 6a - \dfrac{1}{2}b + c = 0 \\ (-4)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 4a - \dfrac{3}{2}b + c = 0 \\ (-4)^2 + 0^2 - 4a + 0b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 36 + \dfrac{1}{4} - 6a - \dfrac{1}{2}b + c = 0 \\ 16 + \dfrac{9}{4} - 4a - \dfrac{3}{2}b + c = 0 \\ 16 - 4a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 144 + 1 - 24a - 2b + 4c = 0 \\ 64 + 9 - 16a - 6b + 4c = 0 \\ c = 4a - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 145 - 24a - 2b + 4\cdot(4a - 16) = 0 \\ 73 - 16a - 6b + 4\cdot(4a - 16) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 145 - 24a - 2b + 16a - 64 = 0 \\ 73 - 16a - 6b + 16a - 64 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8a - 2b + 81 = 0 \\ -6b + 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a - 2\cdot\dfrac{3}{2} + 81 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8a + 78 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{39}{4} \\ b = \dfrac{3}{2} \\ c = 4\cdot\dfrac{39}{4} - 16 = 23 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{39}{4}x + \frac{3}{2}y + 23 = 0$$

Il fuoco F della parabola γ ha coordinate:

$$x_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1 - 2^2 + 4\cdot 1\cdot(-3)}{4\cdot 1} = \frac{1 - 4 - 12}{4} = -\frac{15}{4}\ ; \qquad y_F = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1\,; \qquad \Rightarrow \quad F\left(-\frac{15}{4}\,;-1\right).$$

Verifichiamo che la circonferenza passa per il fuoco $F(-4\,;-1)$:

$$\left(-\frac{15}{4}\right)^2 + (-1)^2 + \frac{39}{4}\cdot\left(-\frac{15}{4}\right) + \frac{3}{2}\cdot(-1) + 23 = 0\,; \qquad \frac{225}{16} + 1 - \frac{585}{16} - \frac{3}{2} + 23 = 0\,; \qquad \frac{225 + 16 - 585 - 24 + 368}{2} = 0\,; \qquad 0 = 0\,.$$

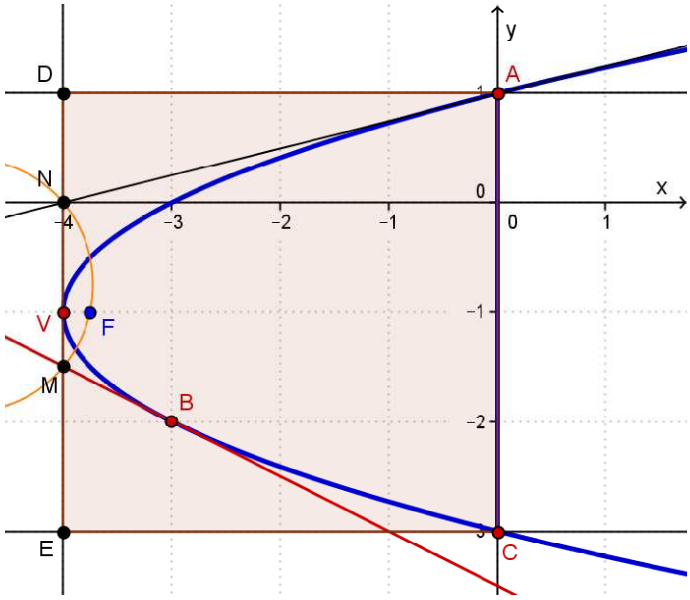
Soluzione c

Determiniamo l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola γ e dall'asse y:

$\overline{AC} = |y_A - y_C| = |1+3| = 4$

$\overline{AD} = |x_A - x_D| = |0+4| = 4$

$s_{AVC} = \frac{2}{3} s_{ADEC} = \frac{2}{3} \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \frac{2}{3} 4 \cdot 4 = \frac{32}{3}$.



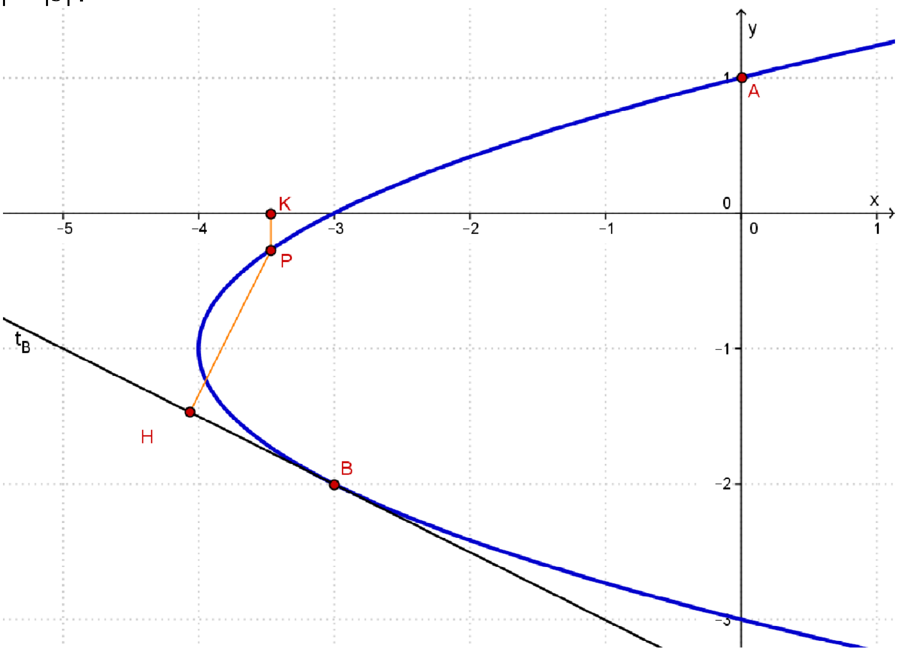
Soluzione d

Determiniamo l'equazione della funzione $f(s) = \sqrt{5} \cdot \overline{PH} + \overline{PK}$

Il punto P ha coordinate: $P\left(s^2 + 2s - 3\ ;\ s\right)$ con $-2 \le s \le 1$.

$$\overline{PH} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1 \cdot (s^2+2s-3) + 2 \cdot s + 7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|s^2+2s-3+2s+7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|s^2+4s+4|}{\sqrt{5}} = \frac{(s+2)^2}{\sqrt{5}}.$$

$\overline{PK} = |y_P - y_K| = |s - 0| = |s|$.



La funzione da rappresentare ha equazione:

$$f(s) = \sqrt{5} \cdot \frac{(s+2)^2}{\sqrt{5}} + |s| = s^2 + 4s + 4 + |s|$$

$$f(s) = \begin{cases} s^2 + 4s + 4 + s & se \quad 0 \le s \le 1 \\ s^2 + 4s + 4 - s & se \quad -2 \le \ s < 0 \end{cases}$$

$$f(s) = \begin{cases} s^2 + 5s + 4 & se \quad 0 \le s \le 1 \\ s^2 + 3s + 4 & se \quad -2 \le \ s < 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (blue) \\ (verde) \end{matrix}$$

Il minimo si ottiene per $s = s_{V_2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$ e vale $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{9-18+16}{4} = \frac{7}{4}$

Il massimo si ottiene per $s = 1$ e vale $f(1) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 4 = 10$