15.02.2014

prof. Mimmo Corrado

Prova di Matematica : Retta

Durata della prova: 80 min

Alunno: ____ Classe: LS 3C

1. Studia il fascio di rette di equazione $(2k+1)x+(k-2)y+3=0$.
   In seguito determina:
   A. l'equazione della retta del fascio passante per il punto $P(2\,;\,-3)$
   B. l'equazione della retta del fascio perpendicolare alla retta $3x-y+4=0$
   C. l'equazione della retta del fascio avente distanza dell'origine uguale $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. Rappresenta graficamente la funzione $y=\sqrt{x^2+6x+9}+|2x+4|$, indicandone dominio e codominio.
   A. Determina le coordinate dei punti A, B, C, $(x_A<x_B<x_C)$ del grafico dato, le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3+5x^2+6x=0$
   B. Individua il punto D tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio rettangolo con angoli retti in C e D.
   C. Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$.
   D. Individua il trapezio $A'B'C'D'$ simmetrico del trapezio $ABCD$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Valutazione	Esercizio	1				2					Totale
	Punti	15	5	5	5	15	5	5	10	5	70

1.

Punti	0 - 2	3 - 7	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42	43 - 47	48 - 52	53 - 57	58 - 62	63 - 67	68 - 70
Voto	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	9½	10

1. Studia il fascio di rette di equazione $(2k+1)x+(k-2)y+3=0$.
   In seguito determina:
   A. l'equazione della retta del fascio passante per il punto $P(2\,;\,-3)$
   B. l'equazione della retta del fascio perpendicolare alla retta $3x-y+4=0$
   C. l'equazione della retta del fascio avente distanza dell'origine uguale $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Soluzione prima parte

1. Determiniamo le rette generatrici del fascio, riscrivendo il fascio come combinazione lineare:

$2kx+x+ky-2y+3=0\,;$ $\qquad\qquad x-2y+3+k(2x+y)=0$

Per $k=0$ $\quad\longrightarrow\quad$ $x-2y+3=0$ $\quad$ (Iª retta generatrice)

Per nessun valore di k $(k\longrightarrow\infty)$ $\quad\longrightarrow\quad$ $2x+y=0$ $\quad$ (IIª retta generatrice)

2. Determiniamo la natura del fascio, verificando la condizione di parallelismo delle rette del fascio:

$ab'-a'b=1\cdot 1-2\cdot(-2)=5\neq 0$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ rette non parallele $\quad\Leftrightarrow\quad$ Fascio proprio.

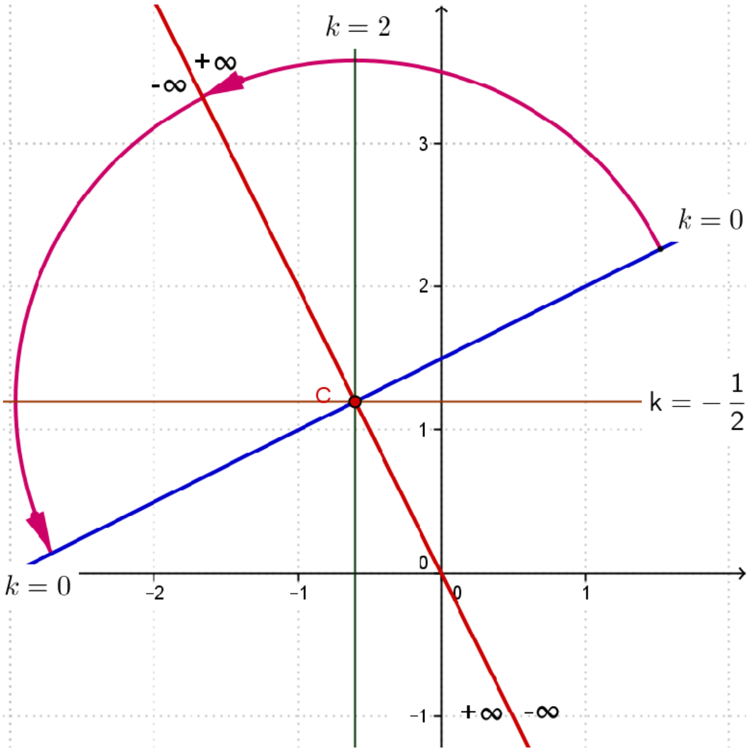
3. Determiniamo le coordinate del centro del fascio, annullando i coefficienti delle due incognite:

$$\left.\begin{array}{llll} Per\ \ k=2 & \longrightarrow & 5x+3=0 & \longrightarrow \quad x=-\frac{3}{5} \\ Per\ \ k=-\frac{1}{2} & \longrightarrow & -\frac{5}{2}y+3=0 & \longrightarrow \quad y=\frac{6}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow\ C\left(-\frac{3}{5}\,;\frac{6}{5}\right)$$

4. Determiniamo il movimento delle rette del fascio al variare del parametro k, mediante la rappresentazione grafica di alcune sue rette.

Dall'esame del grafico di queste rette si deduce che:

Il parametro k assume valori positivi, crescenti da 0 a $+\infty$, quando le rette del fascio, ruotano in senso antiorario attorno al centro C, passando dalla posizione della prima generatrice $(k=0)$ alla posizione della seconda generatrice $(k=+\infty)$.



Soluzione A

Imponiamo il passaggio per il punto $P(2\,;\,-3)$:

$(2k+1)\cdot 2+(k-2)\cdot(-3)+3=0\,;$ $\qquad 4k+2-3k+6+3=0\,;$ $\qquad k=-11\,.$

Sostituendo tale valore nel fascio si ha:

$-21x-13y+3=0\,.$

Soluzione B

Imponiamo la condizione di perpendicolarità:

$a\cdot a'+b\cdot b'=0\,;$ $\qquad 3\cdot(2k+1)-1\cdot(k-2)=0\,;$ $\qquad 6k+3-k+2=0\,;$

$5k=-5\,;$ $\qquad k=-1\,.$

Sostituendo tale valore nel fascio si ha:

$-x-3y+3=0\,.$

Soluzione C

Imponiamo la condizione della traccia:

$$d\,(F\,,O) = \frac{1}{\sqrt{5}}\;; \qquad \frac{|a\cdot x_O + b\cdot y_O + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\;;$$

$$\frac{|(2k+1)\cdot 0 + (k-2)\cdot 0 + 3|}{\sqrt{(2k+1)^2+(k-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\;; \qquad \frac{3}{\sqrt{4k^2+1+4k+k^2+4-4k}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\;;$$

$$\frac{3}{\sqrt{5k^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\;; \qquad \frac{|3|}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\;;$$

$$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}} = 1\;; \qquad 3 = \sqrt{k^2+1}\;;$$

$$9 = k^2+1\;; \qquad k^2 = 8 \qquad k = \mp\sqrt{8} = \mp 2\sqrt{2}$$

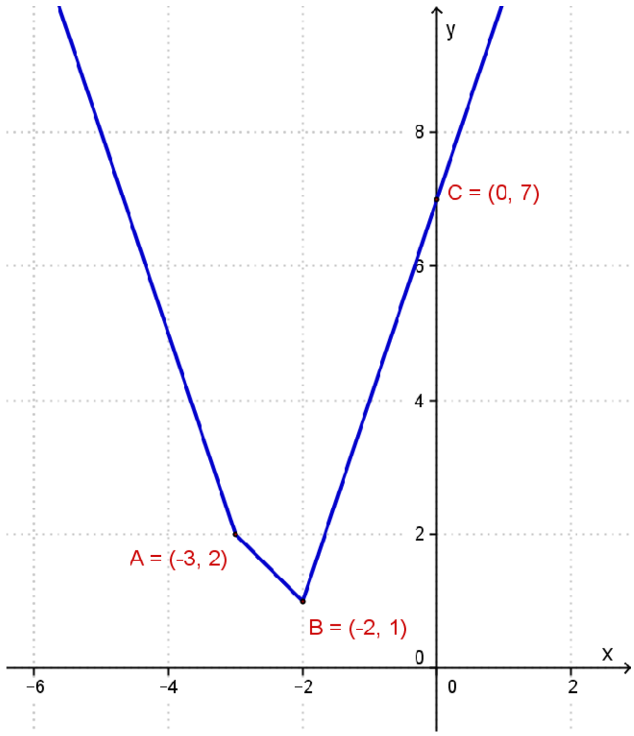
Sostituendo tali valori nel fascio si hanno le due rette:

a. $\left(2\cdot 2\sqrt{2}+1\right)x + \left(2\sqrt{2}-2\right)y + 3 = 0\;;$ $\qquad \left(1+4\sqrt{2}\right)x + 2\left(\sqrt{2}-1\right)y + 3 = 0\;;$

b. $\left(2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)+1\right)x + \left(-2\sqrt{2}-2\right)y + 3 = 0\;;$ $\qquad \left(1-4\sqrt{2}\right)x - 2\left(\sqrt{2}+1\right)y + 3 = 0\;;$

2. Rappresenta graficamente la funzione: $y = \sqrt{x^2+6x+9} + |2x+4|$, indicandone dominio e codominio.

A. Determina le coordinate dei punti $A, B, C,\ (x_A < x_B < x_C)$ del grafico dato, le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3+5x^2+6x = 0$
B. Individua il punto D in modo tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio rettangolo con angoli retti in C e D.
C. Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$.
D. Individua il trapezio $A'B'C'D'$ simmetrico del trapezio $ABCD$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



Soluzione

$$y = \sqrt{x^2+6x+9} + |2x+4|\;;$$

$$y = \sqrt{(x+3)^2} + |2x+4|\;;$$

$$y = |x+3| + |2x+4|\;;$$

Studiamo i segni dei due valori assoluti:

$x+3 \geq 0 \qquad x \geq -3$

$2x+4 \geq 0 \qquad x \geq -2$

	-3		-2	
$-$		$+$		$+$
$-$		$-$		$+$

Pertanto si ha:

$$y = |x+3| + |2x+4| = \begin{cases} -(x+3)-(2x+4) & se \quad x < -3 \\ +(x+3)-(2x+4) & se \quad -3 \leq x \leq -2 \\ +(x+3)+(2x+4) & se \quad x > -2 \end{cases} \qquad \text{cioè:}$$

$$y = |x-2| + |x+1| = \begin{cases} -3x-7 & se \quad x < -3 \\ -x-1 & se \quad -3 \leq x \leq -2 \\ +3x+7 & se \quad x > -2 \end{cases}$$ il cui grafico è sopra raffigurato.

Dal grafico si evince che: $\quad Dominio = \left]-\infty\,,+\infty\right[\qquad Codominio = \left[1\,,+\infty\right[$.

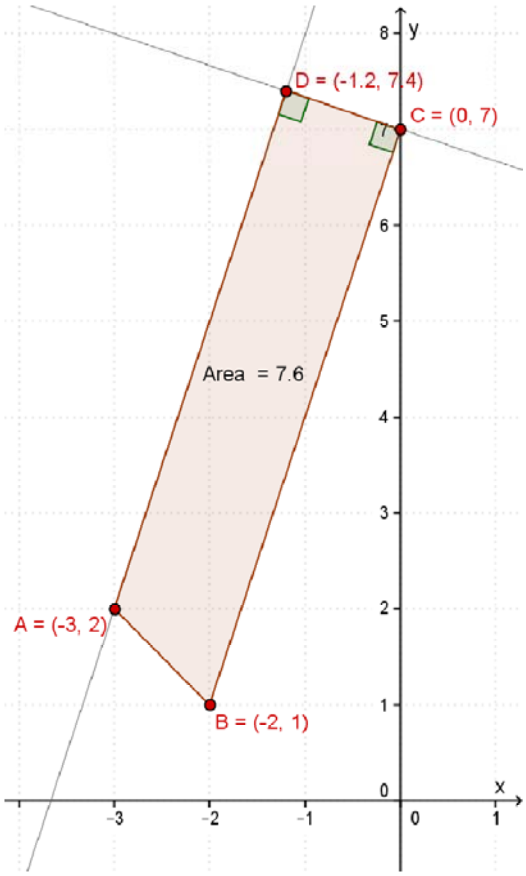
Soluzione A

$x^3 + 5x^2 + 6x = 0\,;\qquad x \cdot (x^2 + 5x + 6) = 0\,;\qquad \begin{matrix} x_C = 0 \\ x^2 + 5x + 6 = 0\,;\quad x_A = -3 \;\wedge\; x_B = -2 \end{matrix}$

$y_A = -(-3) - 1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad A(-3\,;2)$

$y_B = -(-2) - 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad B(-3\,;1)$

$y_C = +3 \cdot 0 + 7 = 7 \qquad \Rightarrow \qquad C(0\,;7)$



Soluzione B

Il punto D è il punto di incontro delle rette AD e CD .

La retta AD passa per il punto A ed è parallela alla retta BC.

La sua equazione è:

$y - y_A = m_{BC} \cdot (x - x_A)\,;\qquad m_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{7-1}{0+2} = 3$

$y - 2 = 3 \cdot (x + 3)\,;\qquad y = 3x + 11$

La retta CD passa per il punto C ed è perpendicolare alla retta BC.

La sua equazione è:

$y - y_C = -\dfrac{1}{m_{BC}} \cdot (x - x_C)\,;$

$y - 7 = -\dfrac{1}{3} \cdot (x - 0)\,;\qquad y = -\dfrac{1}{3}x + 7$

Il punto D ha coordinate:

$\begin{cases} AD \\ CD \end{cases}\qquad \begin{cases} y = 3x + 11 \\ y = -\dfrac{1}{3}x + 7 \end{cases}\qquad \begin{cases} - \\ 3x + 11 = -\dfrac{1}{3}x + 7 \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ 9x + 33 = -x + 21 \end{cases}\qquad \begin{cases} - \\ 10x = -12 \end{cases}\qquad \begin{cases} - \\ x = -\dfrac{6}{5} \end{cases}\qquad \begin{cases} y = 3 \cdot \left(-\dfrac{6}{5}\right) + 11 = \dfrac{-18+55}{5} = \dfrac{37}{5} \\ - \end{cases}$

Pertanto le coordinate del punto D sono: $D\left(-\frac{6}{5}\,;\,\frac{37}{5}\right)$.

Soluzione C

$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(-3-(-2)\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

$\overline{CD} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{\left(0+\frac{6}{5}\right)^2 + \left(7-\frac{37}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25}+\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$.

$\overline{AD} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{\left(-3+\frac{6}{5}\right)^2 + \left(2-\frac{37}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25}+\frac{729}{25}} = \sqrt{\frac{810}{25}} = \frac{9}{5}\sqrt{10}$.

Il perimetro è:

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} \;=\; \sqrt{2} + 2\sqrt{10} + \dfrac{2}{5}\sqrt{10} + \dfrac{9}{5}\sqrt{10} \;=\; \sqrt{2} + \dfrac{21}{5}\sqrt{10}\,.$

L'area è:

$S = \dfrac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \cdot \overline{CD} = \dfrac{2\sqrt{10} + \frac{9}{5}\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{2}{5}\sqrt{10} = \dfrac{\frac{19}{5}\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{2}{5}\sqrt{10} = \dfrac{19}{25} \cdot 10 \;=\; \dfrac{38}{5}\,.$

Soluzione D

Il trapezio $A'B'C'D'$ simmetrico del trapezio $ABCD$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante si ottiene utilizzando le formule:

$$\begin{cases} x_{A'} = y_A = +2 \\ y_{A'} = x_A = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B'} = y_B = +1 \\ y_{B'} = x_B = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C'} = y_C = +7 \\ y_{C'} = x_C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{D'} = y_D = +\dfrac{37}{5} \\ y_{D'} = x_D = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$