Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2013-2014

Prova di Matematica : Ellisse-Iperbole

04.06.2014

prof. Mimmo Corrado

Durata della prova: 75 min

Alunno: ____ Classe: LS 3C

1. Dopo aver tracciato il grafico della curva γ di equazione: $y = \frac{|x-2|}{x-3}$ determina:
   a. le tangenti t_1 e t_2 alla curva γ nel suo punto A di ordinata nulla;
   b. i punti d'intersezione B e C delle tangenti t_1 e t_2 con l'asse y;
   c. l'area del triangolo ABC;
   d. l'equazione dell'ellisse avente centro di simmetria in $A(2;0)$, un fuoco in $F_1(6;0)$ e asse maggiore lungo 10.

Valutazione	Esercizio	1	a	b	c	d	Totale
	Punti	20	20	5	10	15	70

1.

Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	9½	10

Soluzione

Il grafico della curva di equazione: $y = \frac{|x-2|}{x-3}$ si ottiene esplicitando la funzione valore assoluto:

$$y = \frac{|x-2|}{x-3} = \begin{cases} y = \frac{x-2}{x-3} & se\ \ x \geq 2 \\ y = \frac{-x+2}{x-3} & se\ \ x < 2 \end{cases}$$

Tracciamo prima il grafico della funzione: $y = \frac{x-2}{x-4}$ nell'intervallo $[2, +\infty[$

Le equazioni degli asintoti sono: $x = 3 \quad \wedge \quad y = 1$.

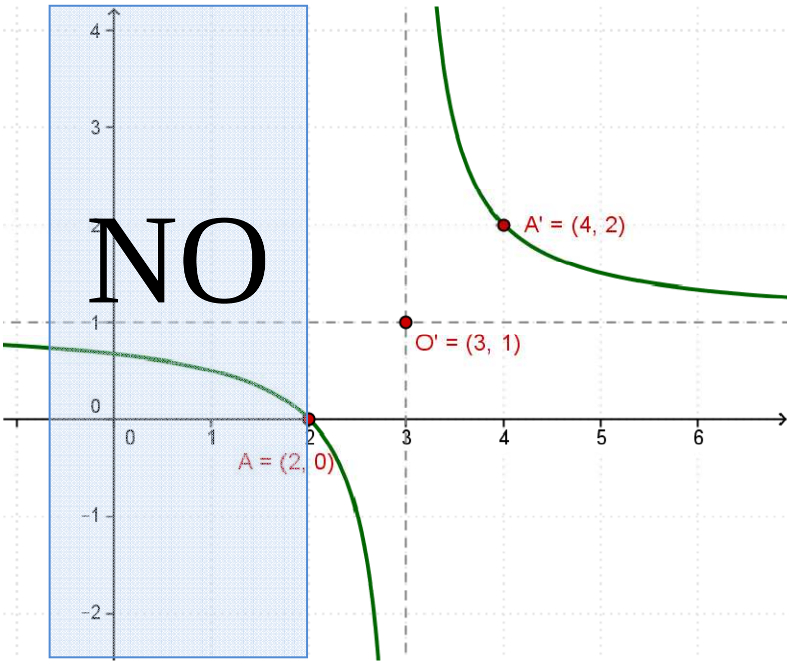
Le coordinate del centro di simmetria sono: $O'(3\ ;\ 1)$

Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \frac{x-2}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\,(2\ ;\ 0)\,.$$

Il simmetrico del punto A rispetto al centro di simmetria ha coordinate:

$$\begin{aligned} x_{A'} &= 2x_{O'} - x_A = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \\ y_{A'} &= 2y_{O'} - y_A = 2 \cdot 1 - 0 = 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A'(4\ ;\ 2)$$



Tracciamo poi il grafico della funzione: $y = \frac{-x+2}{x-3}$ nell'intervallo $]-\infty,\ 2[$

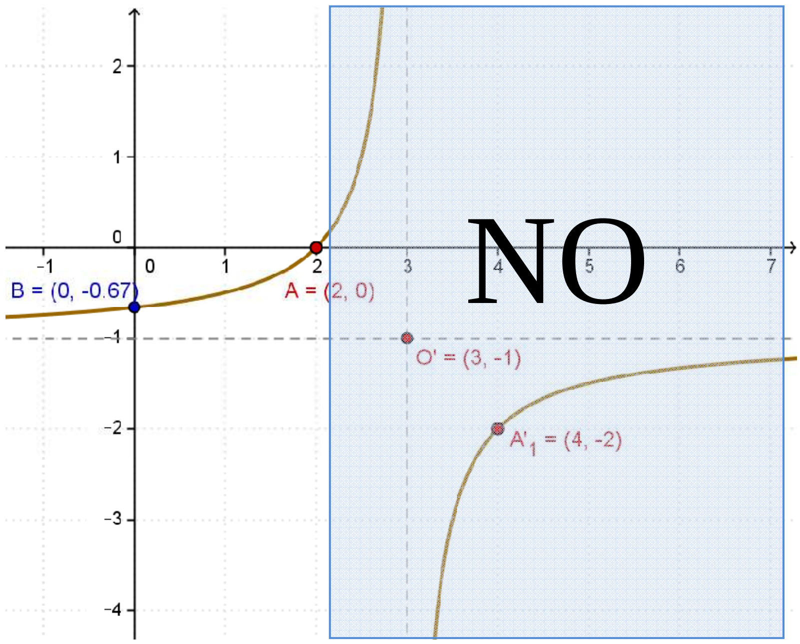
Le equazioni degli asintoti sono: $x = 3 \quad \wedge \quad y = -1$.

Le coordinate del centro sono: $O'(3\,;-1)$

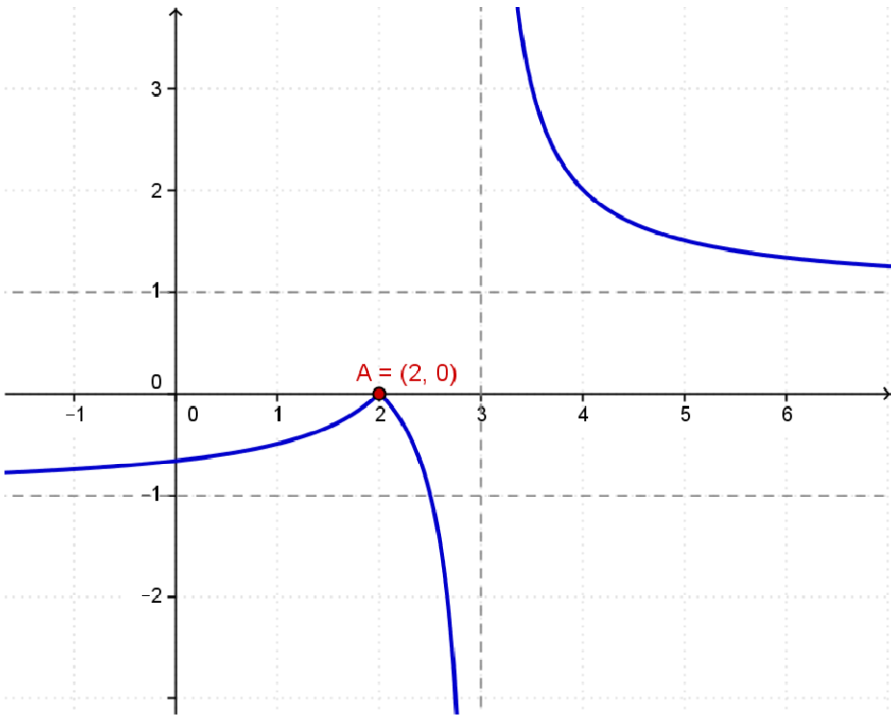
Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \frac{-x+2}{x-3} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\left(0\ ;\ -\frac{2}{3}\right) \qquad \begin{cases} y = \frac{-x+2}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\,(2\ ;\ 0)\,.$$

$$\begin{aligned} x_{A'} &= 2x_{O'} - x_A = 2 \cdot 3 - 2 = +4 \\ y_{A'} &= 2y_{O'} - y_A = 2 \cdot (-1) - 0 = -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A''(4\ ;\ -2)$$



Riuniamo i due grafici nei rispettivi domini si ottiene il grafico della funzione traccia.



Soluzione a

Il punto di ordinata nulla, come si evince dal grafico, è il punto $A\ (2;\ 0)$.

La tangente t_1 al ramo destro della curva γ_d: $y = \frac{x-2}{x-3}$ nel punto $A\ (2;\ 0)$ si ottiene imponendo nel sistema seguente la condizione di tangenza $\Delta = 0$:

$\begin{cases} y = \dfrac{x-2}{x-3} \\ y - 0 = m(x-2) \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y = \dfrac{x-2}{x-3} \\ y = mx - 2m \end{cases}$ $\quad\begin{cases} mx - 2m = \dfrac{x-2}{x-3} \\ - \end{cases}$ $\quad\begin{cases} (mx-2m)(x-3) = x-2 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} mx^2 - 3mx - 2mx + 6m = x - 2 \\ - \end{cases}$ $\quad\begin{cases} mx^2 - (5m+1)x + 6m + 2 = 0 \\ - \end{cases}$

$\Delta = 0$; $\quad (5m+1)^2 - 4m(6m+2) = 0$; $\quad 25m^2 + 1 + 10m - 24m^2 - 8m = 0$;

$m^2 + 2m + 1 = 0$; $\quad (m+1)^2 = 0$; $\quad m + 1 = 0$; $\quad m = -1$.

Pertanto la tangente t_1 ha equazione: $y = -x + 2$.

La tangente t_2 al ramo sinistro della curva γ_s: $y=\frac{-x+2}{x-3}$ nel punto $A\,(2;\ 0)$ si ottiene imponendo nel sistema seguente la condizione di tangenza $\Delta=0$:

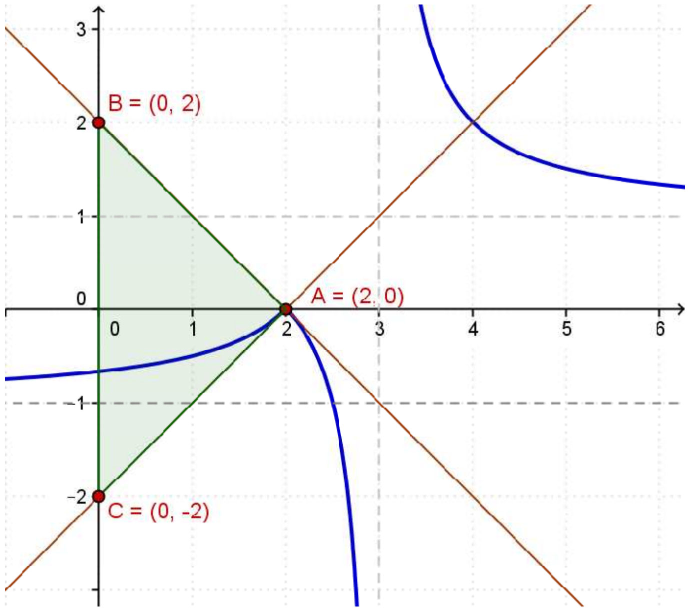
$$\begin{cases} y=\dfrac{-x+2}{x-3} \\ y-0=m(x-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{-x+2}{x-3} \\ y=mx-2m \end{cases} \qquad \begin{cases} mx-2m=\dfrac{-x+2}{x-3} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} (mx-2m)(x-3)=-x+2 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx^2-3mx-2mx+6m=-x+2 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} mx^2-(5m-1)x+6m-2=0 \\ - \end{cases}$$

$\Delta=0$; $\quad (5m-1)^2-4m(6m-2)=0$; $\quad 25m^2+1-10m-24m^2+8m=0$;

$m^2-2m+1=0$; $\quad (m-1)^2=0$; $\quad m-1=0$; $\quad m=+1$.

Pertanto la tangente t_2 ha equazione: $y=x-2$.



Soluzione b

I punti d'intersezione B e C delle tangenti t_1 e t_2 con l'asse y si ottengono risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} y=-x+2 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(0;2)$$

$$\begin{cases} y=x-2 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(0;-2)$$

Soluzione C

L'area del triangolo ABC si ottiene determinando prima le misure della base e dell'altezza:

$$\begin{aligned} \overline{BC}&=|y_B-y_C|=|2+2|=4 \\ \overline{AO}&=|x_A-x_O|=|2-0|=2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad S_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AO}}{2}=\frac{4\cdot 2}{2}=4$$

Soluzione d

Sapendo che l'asse maggiore è lungo 10 $\Rightarrow$ $2a=10$; $a=5$.

Sapendo che $F_1(6;0)$ $\Rightarrow$ la semidistanza focale misura $c=\overline{AF_1}=|x_{F_1}-x_A|=|6-2|=4$

Pertanto: $b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9$.

L'equazione dell'ellisse richiesta è:

$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-0)^2}{9}=1\ ; \qquad \frac{x^2-4x+4}{25}+\frac{y^2}{9}=1\ ; \qquad 9(x^2-4x+4)+25y^2=225\ ;$$

$$9x^2-36x+36+25y^2=225\ ; \qquad 9x^2-36x+25y^2-189=0\ .$$