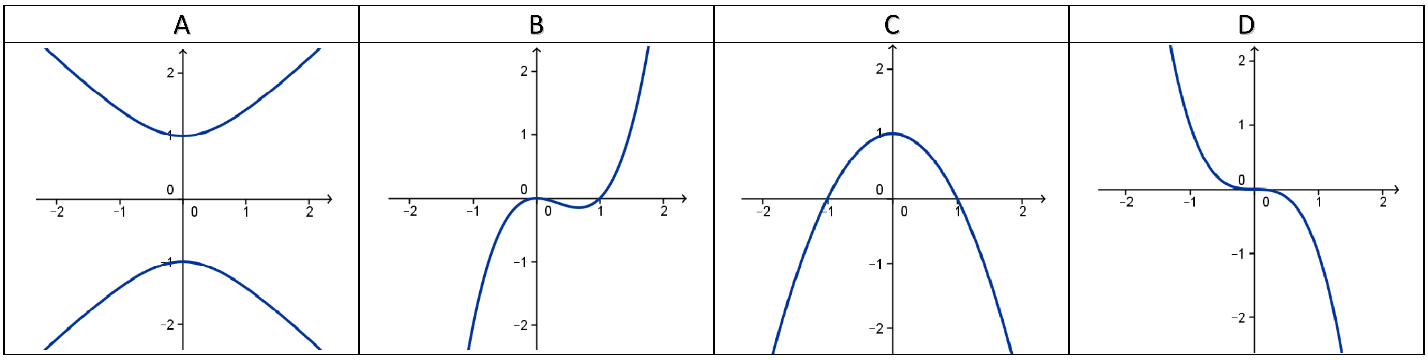
04.12.2013
prof. Mimmo Corrado

Prova di Matematica : Funzioni

Durata della prova: 1^h

Alunno: ____ *Classe: LS 3C*

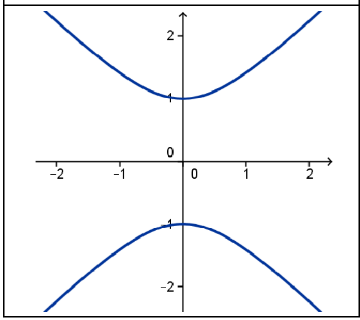
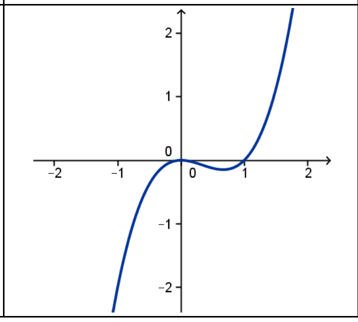
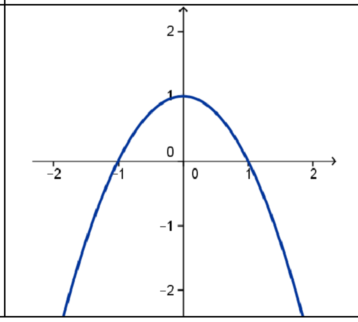
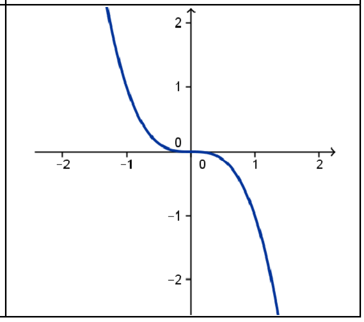


1. Quale, fra le curve sopra rappresentate, non è il grafico di una funzione: A B C D
2. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione biunivoca: A B C D
3. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione suriettiva ma non iniettiva: A B C D
4. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione pari: A B C D
5. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione dispari: A B C D
6. Indica il codominio della curva **C** : ____________________
7. Indica l’intervallo nel quale la curva **B** è negativa: ____________________
8. Indica l’intervallo nel quale la curva **C** è crescente in senso stretto : ____________________
9. Calcola il dominio della funzione $y = \sqrt{|2x - 16| - 5x^2}$
10. Determina il dominio, gli zeri e il segno della funzione $y = \sqrt{x^2 - 5} - 2$ e rappresenta graficamente le regioni del piano cartesiano alle quali appartiene il suo grafico.
11. Determina sotto quali condizioni la funzione $f: R \to R$ definita dalla relazione $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ è invertibile.
    Traccia poi, nello stesso piano cartesiano, il suo grafico e quello della sua funzione inversa.
12. Data la funzione $f(x) = ax^2 - bx + 1$, determina a e b in modo che $f(x)$ sia pari e risulti $f(1) = 3$.
13. Dimostra che: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \,.\,.\,.\, + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ $\forall n \in N - \{0\}$
    In seguito calcola: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \,.\,.\,.\, + 100^3$
14. Determina la somma dei primi 50 numeri pari, a partire da 2.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Totale
	Punti	1	1	1	1	1	2	2	2	10	12	7	12	10	8	70

Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*9½*	*10*

Soluzione

A	B	C	D
			

1. Quale, fra le curve sopra rappresentate, non è il grafico di una funzione: A
2. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione biunivoca: D
3. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione suriettiva ma non iniettiva: B
4. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione pari: C
5. Quale, fra le curve sopra rappresentate, è il grafico di una funzione dispari: D
6. Indica il codominio della curva C : $C =]-\infty\,,1]$
7. Indica l'intervallo nel quale la curva B è negativa: $]-\infty\,,0[\ \cup\ ]0\,,1[$
8. Indica l'intervallo nel quale la curva C è crescente in senso stretto : $]-\infty\,,0]$
9. Calcola il dominio della funzione $\quad y = \sqrt{|2x-16| - 5x^2}$

$|2x-16| - 5x^2 \geq 0\,;$

$$\begin{cases} 2x - 16 \geq 0 \\ +(2x-16) - 5x^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 2x - 16 < 0 \\ -(2x-16) - 5x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 16 \\ -5x^2 + 2x - 16 \geq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 2x < 16 \\ -5x^2 - 2x + 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 8 \\ 5x^2 - 2x + 16 \leq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x < 8 \\ 5x^2 + 2x - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 8 \\ \nexists x \in R \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x < 8 \\ -2 \leq x \leq \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$$\nexists x \in R \qquad \vee \qquad -2 \leq x \leq \frac{8}{5}$$

Pertanto il dominio di $\ y = \sqrt{|2x-16| - 5x^2}\quad$ è $\quad D\colon\ \left[-2\,,\ \frac{8}{5}\right]$

10. Determina il dominio, gli zeri e il segno della funzione $y = \sqrt{x^2-5} - 2$ e rappresenta graficamente le regioni del piano cartesiano alle quali appartiene il suo grafico.

<u>*Soluzione*</u>

Dominio $\quad D\colon\ x^2 - 5 \geq 0\,; \qquad x \leq -\sqrt{5} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{5}$

Zeri $\quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = 0: \quad \sqrt{x^2-5} - 2 = 0\,; \quad \sqrt{x^2-5} = 2\,; \quad x^2 - 5 = 4\ ; \quad x^2 = 9\,; \quad x = \mp 3\,.$

Segno $\quad f(x) > 0: \qquad \sqrt{x^2-5} - 2 > 0\,; \qquad \sqrt{x^2-5} > 2\,;$

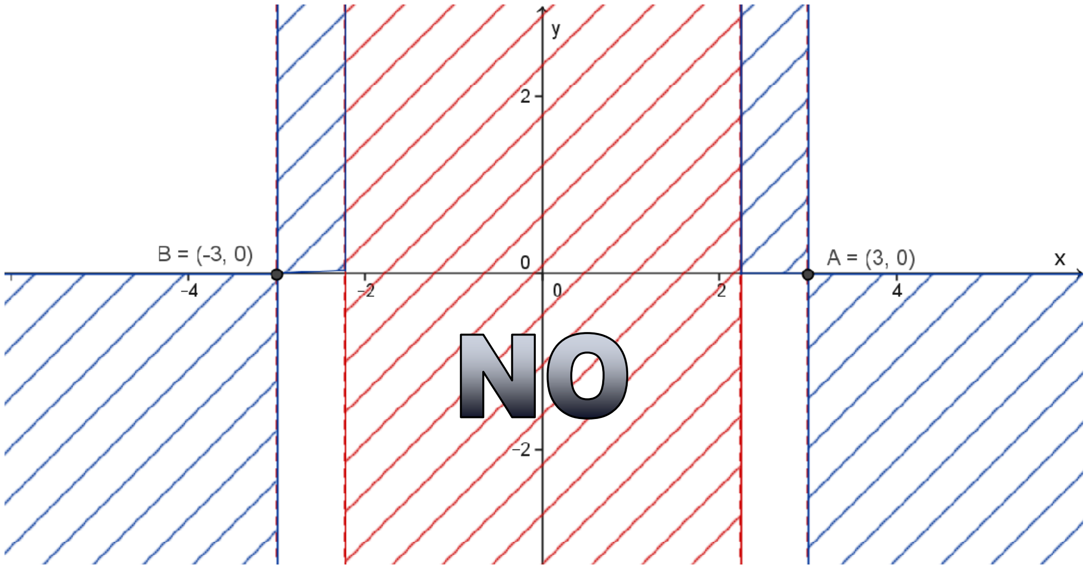
$$\begin{cases} 2 < 0 \\ x^2 - 5 \geq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 2 \geq 0 \\ x^2 - 5 > 2^2 \end{cases}$$

$$\nexists x \in R \qquad \vee \qquad \begin{cases} \forall x \in R \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

$$x < -3 \qquad \vee \qquad x > 3\,.$$

Pertanto $\quad f(x) > 0: \qquad x < -3 \qquad \vee \qquad x > 3$

$f(x) < 0: \qquad -3 < x < -\sqrt{5} \qquad \vee \qquad \sqrt{5} < x < 3$



11. Determina sotto quali condizioni la funzione $f: R \to R$ definita dalla relazione $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ è invertibile. Traccia poi, nello stesso piano cartesiano, il suo grafico e quello della sua funzione inversa.

La funzione $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ è una parabola con il vertice in $V(0\,;\,-2)$ e concavità rivolta verso l'alto.

Infatti: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot \frac{1}{8}} = 0\,;\quad y_V = f(x_V) = f(0) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 - 2 = -2$

Pertanto la funzione non è biunivoca, e quindi non ha funzione inversa.

Si può dedurre tale risultato anche per via analitica, ricavando la variabile x dalla relazione $y = f(x)$.

Infatti: $\frac{1}{8}x^2 = y + 2\,;\quad x^2 = 8y + 16\,;\qquad x = \mp\sqrt{8y + 16}$.

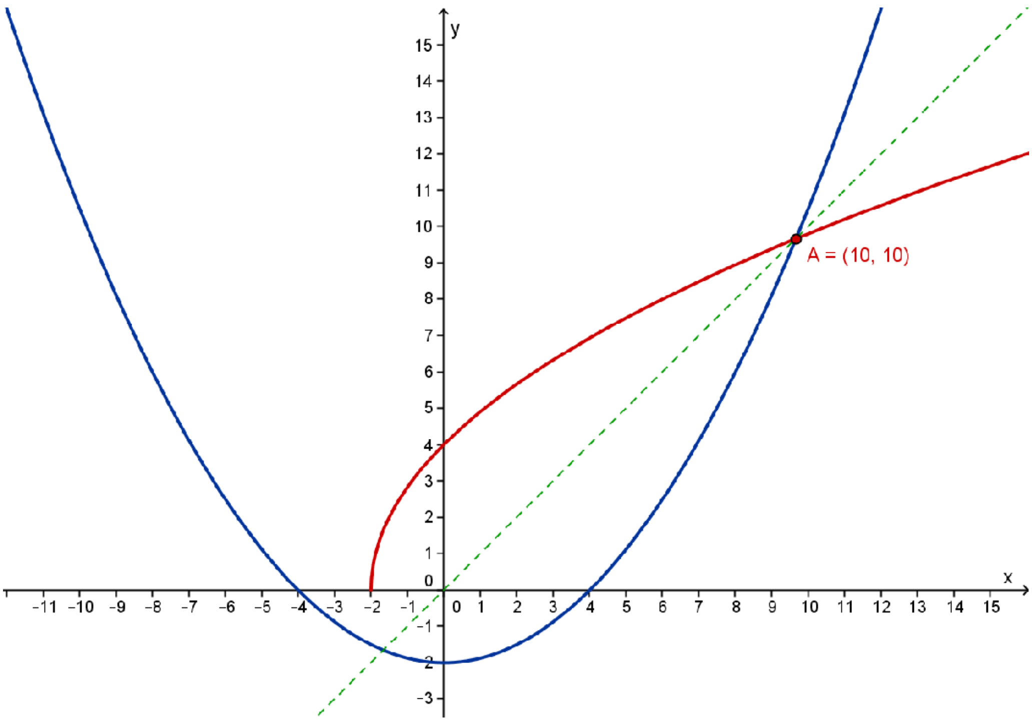
Da cui si ricava che la variabile x si ottiene per $8y + 16 \geq 0\,;\quad y \geq -2$.

Mentre per $y \leq -2$ non si può ricavare alcun valore di x, ciò vuol dire che la funzione $f(x)$ non è suriettiva.

Inoltre, ogni valore di $y \geq -2$ è immagine di due valori di x : $x_1 = -\sqrt{8y + 16}$ e $x_2 = +\sqrt{8y + 16}$, ciò vuol dire che la funzione $f(x)$ non è iniettiva.

Considerando la restrizione $D = [0\,, +\infty[$ del dominio e la restrizione $C = [-2\,, +\infty[$ del codominio, la funzione $f: D \to C$ diventa biunivoca e quindi invertibile, e la sua funzione inversa è $x = \sqrt{8y + 16}$.

Per rappresentare la funzione inversa nello stesso piano cartesiano della funzione diretta occorre scambiare le variabili x e y .
Si ottiene così : $y = \sqrt{8x + 16}$ il cui grafico è il simmetrico di $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



12. Data la funzione $f(x) = ax^2 - bx + 1$, determina a e b in modo che sia pari e risulti $f(1) = 3$.

$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(1) = 3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a(-x)^2 - b(-x) + 1 = ax^2 - bx + 1 \\ a \cdot (1)^2 - b \cdot (1)^2 + 1 = 3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} ax^2 + bx + 1 = ax^2 - bx + 1 \\ a - b + 1 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} bx = -bx \\ a - b + 1 = 3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2bx = 0 \\ a - b + 1 = 3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} b = 0 \\ a - 0 + 1 = 3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^2 + 1$.

13. Dimostra che: $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \qquad \forall n \in N - \{0\}$

In seguito calcola: $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3$

Dimostrazione

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2$; $\qquad 1 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4$; $\qquad 1 = 1$.

Supponiamo che la proposizione sia vera per n	dimostriamo	che è vera per $n + 1$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$	$\Rightarrow$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$

$\underbrace{\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}} + (\mathbf{n+1})^3 =$

$= \quad \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \qquad + (n+1)^3 = \qquad \qquad raccogliamo\ a\ fattor\ comune\ \ (n+1)^2$

$= (n+1)^2 \cdot \left[\frac{1}{4} n^2 + (n+1)\right] = (n+1)^2 \cdot \left[\frac{1}{4} n^2 + n + 1\right] = \qquad raccogliamo\ a\ fattor\ comune\ \ \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot [n^2 + 4n + 4] = \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2$.

$La\ somma \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3 = \frac{1}{4} \cdot 100^2 \cdot (100+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 10000 \cdot 10201 = 25\,502\,500$.

14. Determina la somma dei primi 50 numeri pari, a partire da 2.

Si tratta di calcolare la somma dei primi 50 numeri di una progressione aritmetica di ragione 2:

$a_1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{50} = a_1 + (n-1) \cdot d = 2 + (50-1) \cdot 2 = 2 + 49 \cdot 2 = 100$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad \Rightarrow \qquad S_{50} = \frac{2 + 100}{2} \cdot 50 = 2550$.