Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2013-2014

Prova di Matematica : Equazioni di II grado

06.03.2014

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

prof. Mimmo Corrado

A. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$24y = -10y^2$	$6a^2 + 7 = -13a$
$x^2 - x = \sqrt{3}\,(x-1)$	$x^2 + 8 = 0$;
$\frac{2}{x^2-1} = \frac{4}{x^2-3x+2} + \frac{1}{3x^2+6x+3}$	$\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + \left(x+4\sqrt{2}\right)^2 = 8$

B. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $k\,x^2 - 2kx - 2x + k - 3 = 0$

a. *ha una sola soluzione*
b. *ha due soluzioni reali e opposte*
c. *ha una delle due soluzioni uguale a 0*
d. *ha soluzioni reali, tali che la loro somma è uguale al triplo del loro prodotto*
e. *ha soluzioni reali tali che la somma dei loro quadrati è 10.*

C. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale: $\frac{x^2-x}{a-1} + ax^2 + 2 + \frac{2a}{1-a} = x - x^2$

D. In un trapezio rettangolo la base maggiore AB è 3 cm più lunga della base minore CD, mentre la base minore CD è 1 cm più corta dell'altezza AD. Sapendo che l'area del trapezio è 39 cm^2, calcola il suo perimetro.

Valutazione	Esercizio	A	B	C	D	Totale
	Punti	3+3+3+3+4+4	2+2+2+4+4	18	18	70

Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*9½*	*10*

Soluzione

A. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$24y = -10y^2\,;\qquad 5y^2+12y=0\,;\qquad x\cdot(5y+12)=0\,;\qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{12}{5}\end{array}$

$6a^2+7=-13a\,;\qquad 6a^2+13a+7=0\qquad \Delta = 169-168=1$

$$x_{1,2} = \frac{-13\pm\sqrt{1}}{2\cdot 6} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-13-1}{12} = -\dfrac{14}{12} = -\dfrac{7}{6} \\ x_2 = \dfrac{-13+1}{12} = -1 \end{array}$$

$x^2 - x = \sqrt{3}\,(x-1)\,;\qquad x^2 - x - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0\,;\qquad x^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$

$\Delta = \left[-\left(1+\sqrt{3}\right)\right]^2 - 4\sqrt{3} = 1+3+2\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 1+3-2\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)^2$

$$x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2\cdot 1} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}$$

$x^2+8=0\,;\qquad x^2=-8\,;\qquad x_{1,2} = \mp\sqrt{-8}\,;\qquad x_{1,2} = \mp 2\sqrt{2}\,i$

$\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{4}{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{3x^2+6x+3}\,;\qquad \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{4}{(x-1)(x-2)} + \dfrac{1}{3(x+1)^2}\,;$

$C.E.:\ x\neq -1 \quad\wedge\quad x\neq 1 \quad\wedge\quad x\neq 2 \qquad m.c.m.: = 3(x+1)^2(x-1)(x-2)$

$6(x-2)(x+1) = 12(x+1)^2 + (x-1)(x-2)\,;$

$6(x^2+x-2x-2) = 12(x^2+1+2x) + x^2-2x-x+2\,;$

$6x^2+6x-12x-12 = 12x^2+12+24x+x^2-2x-x+2\,;$

$$7x^2+27x+26=0\,;\qquad \Delta = 729-728=1\qquad x_{1,2} = \frac{-27\mp\sqrt{1}}{2\cdot 7} = \begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{-27-1}{14} = -\dfrac{28}{14} = -2 & Acc \\ x_2 = \dfrac{-27+1}{14} = -\dfrac{26}{14} = -\dfrac{13}{7} & Acc \end{array}$$

$\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + \left(x+4\sqrt{2}\right)^2 = 8\,;\qquad x^2+8+4\sqrt{2}x+x^2+32+8\sqrt{2}x-8=0\,;$

$2x^2+12\sqrt{2}x+32=0\,;\qquad x^2+6\sqrt{2}x+16=0\,;$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 16 = 18-16 = 2\,;\qquad x_{1,2} = \frac{-3\sqrt{2}\mp\sqrt{2}}{1} = \begin{array}{l} x_1 = -3\sqrt{2}-\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \\ x_2 = -3\sqrt{2}+\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \end{array}$$

B. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $k\,x^2 - 2kx - 2x + k - 3 = 0$

a. *ha una sola soluzione*
b. *ha due soluzioni reali e opposte*
c. *ha una delle due soluzioni uguale a zero*
d. *ha soluzioni reali, tali che la loro somma è uguale al triplo del loro prodotto*
e. *ha soluzioni reali tali che la somma dei loro quadrati è 10.*

Soluzione

$k\,x^2 - 2(k+1)x + k - 3 = 0$

Le soluzioni sono reali se $\Delta \geq 0$;

$\frac{\Delta}{4} \geq 0$; $\quad (k+1)^2 - k(k-3) \geq 0$; $\quad k^2 + 1 + 2k - k^2 + 3k \geq 0$; $\quad 5k \geq -1$; $\quad k \geq -\frac{1}{5}$

a. ha una sola soluzione se $k = 0$ Accettabile $\Rightarrow$ $-2x - 3 = 0$; $\quad x = -\frac{3}{2}$.

b. ha due soluzioni reali e opposte se $-2(k+1) = 0$; $\quad k = -1$ Non accettabile.

c. ha una delle due soluzioni uguale a zero se $k - 3 = 0$, $\quad k = 3$ $\Rightarrow$ $3x^2 - 8x = 0$ $\quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{matrix}$

d. ha soluzioni reali, tali che $x_1 + x_2 = 3(x_1 \cdot x_2)$; $\quad -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = 3\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$; $\quad -\mathrm{b} = 3\mathrm{c}$ con $\mathrm{a} \neq 0$

$2(k+1) = 3(k-3)$; $\quad 2k + 2 = 3k - 9$; $\quad k = 11$.

e. ha soluzioni reali tali che $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 10$

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$;

$\frac{b^2 - 2ac}{a^2} = 10$; $\quad \frac{[-2(k+1)]^2 - 2k(k-3)}{k^2} = 10$; $\quad \frac{4k^2 + 4 + 8k - 2k^2 + 6k}{k^2} = 10$; $\quad k \neq 0$

$4k^2 + 4 + 8k - 2k^2 + 6k = 10k^2$; $\quad 8k^2 - 14k - 4 = 0$; $\quad 4k^2 - 7k - 2 = 0$;

$\Delta = 49 + 32 = 81 \qquad k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = $

$k_1 = \frac{7-9}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ *Non Accettabile*

$k_2 = \frac{7+9}{8} = \frac{16}{8} = 2$ *Accettabile*

C. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale:

$\frac{x^2 - x}{a - 1} + ax^2 + 2 + \frac{2a}{1 - a} = x - x^2$;

Soluzione

$\frac{x^2 - x}{a - 1} + ax^2 + 2 - \frac{2a}{a - 1} = x - x^2$; $\qquad C.E.:\ a \neq 1 \quad \Rightarrow$

$x^2 - x + a^2x^2 - ax^2 + 2a - 2 - 2a = ax - ax^2 - x + x^2$;

$a^2x^2 - ax - 2 = 0$;

$a^2x^2 - ax - 2 = 0$		$A = a^2$	$B = -a$	$C = -2$

$A = 0$ *(Equazione di I grado)* $\Rightarrow$ $a^2 = 0$; $\quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = 0 \quad \nexists a \in R$

$B = 0$ *(Equazione Pura)* $\Rightarrow$ $-a = 0$; $\quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = 0 \quad \nexists a \in R$

$C = 0$ *(Equazione Spuria)* $\Rightarrow$ $-2 = 0 \quad \nexists a \in R$

$\Delta = (-a)^2 - 4a^2 \cdot (-2) = a^2 + 8a^2 = 9a^2$

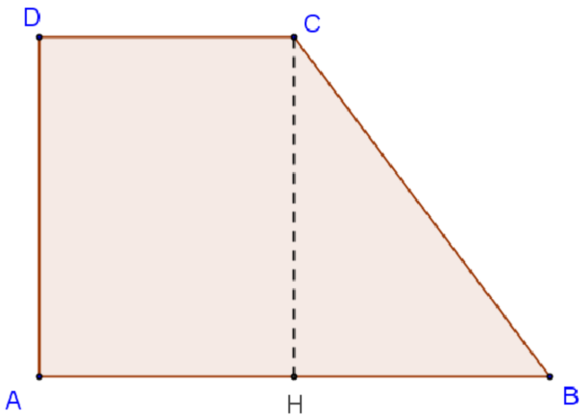
$\Delta = 0 \quad 9a^2 = 0$; $\quad a = 0$; $\quad \Rightarrow \quad -2 = 0 \quad \nexists a \in R$

$\Delta < 0 \quad 9a^2 < 0$; $\quad \nexists a \in R$

$$\Delta > 0 \qquad 9a^2 > 0\ ; \qquad a \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{9a^2}}{2a^2} = \begin{matrix} x_1 = \dfrac{a-3a}{2a^2} = \dfrac{-2a}{2a^2} = -\dfrac{1}{a} \\ x_2 = \dfrac{a+3a}{2a^2} = \dfrac{4a}{2a^2} = \dfrac{2}{a} \end{matrix}$$

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 1$	*Perde di significato*	$-$
$\nexists a \in R$	*Equazione di I° grado*	$-$
$\nexists a \in R$	*Equazione Pura*	$-$
$\nexists a \in R$	*Equazione Spuria*	$-$
$\nexists a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$-$
$\nexists a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	$-$
$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = -\frac{1}{a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{2}{a}$

D. In un trapezio rettangolo la base maggiore AB è 3 cm più lunga della base minore CD, mentre la base minore CD è 1 cm più corta dell'altezza AD. Sapendo che l'area del trapezio è 39 cm^2, calcola il suo perimetro.



Soluzione

$\overline{AD} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CD} = x - 1$

$\overline{AB} = x - 1 + 3 = x + 2$

Essendo x la misura di una lunghezza, deve essere $x > 0$.

$S = 39\ cm^2\ ; \qquad \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{AD} = 39\ ;$

$\dfrac{x + 2 + x - 1}{2} \cdot x = 39\ ; \qquad (2x + 1) \cdot x = 78;$

$2x^2 + x - 78 = 0\ ; \qquad \Delta = 1 + 624 = 625$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2 \cdot 2} = \begin{matrix} x_1 = \dfrac{-1-25}{4} = -\dfrac{13}{2} & \textit{non accettabile} \\ x_2 = \dfrac{-1+25}{4} = 6 & \textit{accettabile} \end{matrix}$$

Pertanto $\overline{AD} = 6\ cm \qquad \overline{CD} = 5\ cm \qquad \overline{AB} = 8\ cm \qquad \overline{HB} = \overline{AB} - \overline{DC} = (8 - 5)\ cm = 3\ cm$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD} = \left(8 + 3\sqrt{5} + 5 + 6\right) cm = \left(19 + 3\sqrt{5}\right) cm$.