Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2013-2014

08.02.2014

prof. Mimmo Corrado

Prova di Matematica : Radicali

Durata della prova: 1^h

Alunno: ______________________________________ *Classe: LS 2 B*

1. $\sqrt[3]{-8} \in Q$ V   F $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8}$ V   F

   $\sqrt[3]{\pi^6} \in Q$ V   F $\sqrt{12}\cdot\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-6}=12$ V   F

   $\sqrt{9}-1,\bar{5} \in Q$ V   F $\sqrt[4]{a^2b^8c^{12}}=b^2|c^3|\sqrt{|a|}$ V   F

2. Ordina, in ordine crescente, i seguenti numeri: $2\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[6]{12}$; $\sqrt[12]{120}$

3. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:

$$\sqrt{\frac{a^4b^2+a^4-2a^4b}{4b^3}}$$

4. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{9}+\sqrt{12}}{\sqrt{32}-\sqrt[4]{4}}\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{a^6+8a^3+12a^4+6a^5}{a-2}}:\sqrt[3]{\frac{a^6+4a^5+4a^4}{(a-2)(a^3-6a^2+12a-8)}}:\sqrt[6]{\frac{(a^2-4)^5}{a^3}}$$

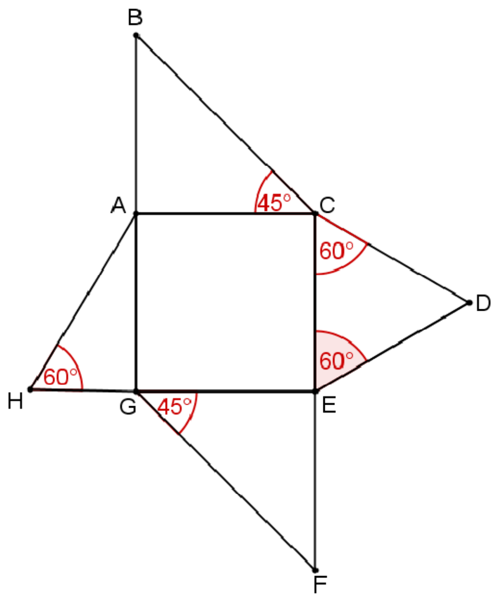
5. Dimostra che l'espressione

$$\frac{x^2-2\sqrt{7}x+7}{x-\sqrt{7}}\cdot\left(x+\sqrt{7}\right)-x^2+14 \quad = \quad 7$$

6. Risolvi la seguente equazione:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{3}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

7. Calcola il perimetro e l'area della figura geometrica ABCDEFGH sapendo che la diagonale del quadrato ACEG misura $\sqrt{5}$.



8. Traccia il grafico della funzione: $y=x+\sqrt{4+x^2-4x}$

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
	Punti	6	6	6	12	6	6	14	14	70

1.

Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*9½*	*10*

Soluzione

1. $\sqrt[3]{-8} \in Q$ $\boxed{\text{V}}$
   $\sqrt[3]{\pi^6} \in Q$ $\boxed{\text{F}}$
   $\sqrt{9} - 1,\overline{5} \in Q$ $\boxed{\text{V}}$
   $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8}$ $\boxed{\text{F}}$
   $\sqrt{12} \cdot \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-6} = 12$ $\boxed{\text{F}}$
   $\sqrt[4]{a^2 b^8 c^{12}} = b^2 |c^3| \sqrt{|a|}$ $\boxed{\text{V}}$

2. Ordina, in ordine crescente, i seguenti numeri: $2\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[6]{12}$; $\sqrt[12]{120}$

Soluzione

Occorre trasformare i tre radicali in tre radicali aventi lo stesso indice:

$$2\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\ ;\ \sqrt[6]{12}\ ;\ \sqrt[12]{120} \quad \mapsto \quad \sqrt[2]{2^2 \cdot \frac{1}{2}}\ ;\ \sqrt[6]{12}\ ;\ \sqrt[12]{120} \quad \mapsto \quad \sqrt[2]{2}\ ;\ \sqrt[6]{12}\ ;\ \sqrt[12]{120}$$

$$\sqrt[12]{2^6}\ ;\ \sqrt[12]{12^2}\ ;\ \sqrt[12]{120} \quad \mapsto \quad \sqrt[12]{64}\ ;\ \sqrt[12]{144}\ ;\ \sqrt[12]{120}$$

I radicali, ordinati in ordine crescente, sono: $\sqrt[12]{64}$; $\sqrt[12]{120}$; $\sqrt[12]{144}$ *cioè:* $2\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[12]{120}$; $\sqrt[6]{12}$.

3. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:

$$\sqrt{\frac{a^4 b^2 + a^4 - 2a^4 b}{4b^3}} = \sqrt{\frac{a^4(b^2 + 1 - 2b)}{4b^3}} = \sqrt{\frac{a^4(b-1)^2}{4b^3}} = \frac{a^2|b-1|}{2b}\sqrt{\frac{1}{b}} \qquad C.E.:\ b \geq 0$$

4. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{9} + \sqrt{12}}{\sqrt{32} - \sqrt[4]{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2} - \sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{\frac{a^6 + 8a^3 + 12a^4 + 6a^5}{a-2}} : \sqrt[3]{\frac{a^6 + 4a^5 + 4a^4}{(a-2)(a^3 - 6a^2 + 12a - 8)}} : \sqrt[6]{\frac{(a^2-4)^5}{a^3}}$$

$$\sqrt{\frac{a^6 + 8a^3 + 12a^4 + 6a^5}{a-2}} : \sqrt[3]{\frac{a^6 + 4a^5 + 4a^4}{(a-2)(a^3 - 6a^2 + 12a - 8)}} : \sqrt[6]{\frac{(a^2-4)^5}{a^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3(a^3 + 8 + 12a + 6a^2)}{a-2}} : \sqrt[3]{\frac{a^4(a^2 + 4a + 4)}{(a-2)(a-2)^3}} : \sqrt[6]{\frac{(a+2)^5 \cdot (a-2)^5}{a^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3(a+2)^3}{a-2}} : \sqrt[3]{\frac{a^4(a+2)^2}{(a-2)^4}} : \sqrt[6]{\frac{(a+2)^5 \cdot (a-2)^5}{a^3}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^9(a+2)^9}{(a-2)^3} \cdot \frac{(a-2)^8}{a^8(a+2)^4} \cdot \frac{a^3}{(a+2)^5 \cdot (a-2)^5}} =$$

$$= \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}\,.$$

5. Dimostra che l'espressione:

$$\frac{x^2 - 2\sqrt{7}x + 7}{x - \sqrt{7}} \cdot \left(x + \sqrt{7}\right) - x^2 + 14 \quad = \quad 7$$

$$\frac{x^2 - 2\sqrt{7}x + 7}{x - \sqrt{7}} \cdot \left(x + \sqrt{7}\right) - x^2 + 14 \quad = \quad \frac{\left(x - \sqrt{7}\right)^2}{x - \sqrt{7}} \cdot \left(x + \sqrt{7}\right) - x^2 + 14 \quad =$$

$$= \quad \left(x - \sqrt{7}\right) \cdot \left(x + \sqrt{7}\right) - x^2 + 14 \quad = \quad x^2 - 7 - x^2 + 14 \quad = \quad 7.$$

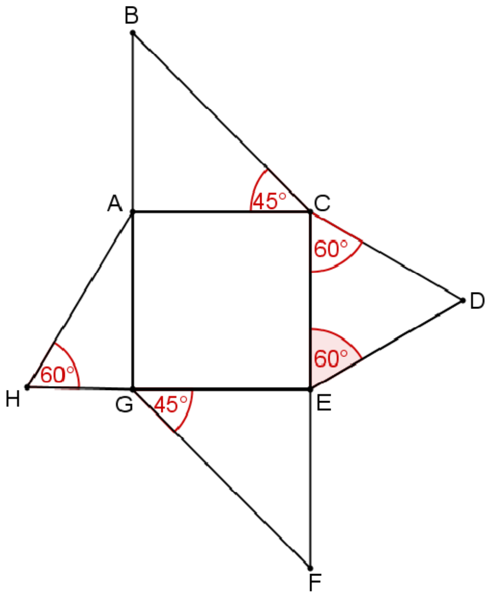
6. Risolvi la seguente equazione:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3}\right)^2 = -\frac{1}{2}\ ; \qquad \frac{x^2}{2} + 2 - 2x - \frac{1}{2}\left(x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 4 - 4x - x^2 - 3 + 2\sqrt{3}x = -1\ ; \qquad -4x + 2\sqrt{3}x = -2\ ; \qquad \left(2\sqrt{3} - 4\right)x = -2\ ;$$

$$x = -\frac{2}{2\sqrt{3} - 4} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 4}{2\sqrt{3} + 4} = -\frac{4\left(\sqrt{3} + 2\right)}{12 - 16} = -\frac{4\left(\sqrt{3} + 2\right)}{-4} = 2 + \sqrt{3}$$

7. Calcola il perimetro e l'area della figura geometrica $ABCDEFGH$ sapendo che la diagonale del quadrato ACEG misura $\sqrt{5}$.



Soluzione

Ricordando che la diagonale del quadrato è: $d = \sqrt{2} \cdot l$ si ha:

$$\overline{AG} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad = \quad \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Il lato $\overline{AH}$ del triangolo AGH:

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AG}}{\sin 60} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad = \quad \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\overline{HG} = \overline{AH} \cdot sin\, 30 = \frac{\sqrt{30}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Ricordando che l'altezza di un triangolo equilatero è: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$ si ha che l'altezza del triangolo CDE è:

$$h_{CDE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{4}$$

Pertanto, il perimetro della figura geometrica $ABCDEFGH$ è:

$$2p_{\mathrm{ABCDEFGH}} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HA} =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{30}}{6} + \frac{\sqrt{30}}{3} =$$

$$= 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{30} + 2\sqrt{30}}{6} \quad = \quad 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{30}}{2}\ .$$

Per quanto riguarda l'area, calcoliamo le aree delle figure che compongono la figura $ABCDEFGH$.

$$S_{\mathrm{ACEG}} = \overline{AG}^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\ . \qquad S_{\mathrm{ABC}} + S_{\mathrm{EFG}} = \overline{AG}^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\ .$$

$$S_{\mathrm{CDE}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot h_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{4} = \frac{\sqrt{300}}{16} = \frac{10\sqrt{3}}{16} = \frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

$$S_{\mathrm{AGH}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HG} \cdot \overline{AG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{300}}{24} = \frac{10\sqrt{3}}{24} = \frac{5\sqrt{3}}{12}.$$

$$S_{\mathrm{ABCDEFGH}} = S_{\mathrm{ACEG}} + S_{\mathrm{ABC}} + S_{\mathrm{EFG}} + S_{\mathrm{CDE}} + S_{\mathrm{AGH}} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{12} = 5 + \frac{15\sqrt{3} + 10\sqrt{3}}{24} = 5 + \frac{25\sqrt{3}}{24}\ .$$

8. Traccia il grafico della funzione: $y = x + \sqrt{4 + x^2 - 4x}$

$y = x + \sqrt{4 + x^2 - 4x}$

$y = x + \sqrt{(x-2)^2}$

$y = x + |x-2| \quad = \quad \begin{cases} x + (x-2) & se \;\; x - 2 \geq 0 \\ x - (x-2) & se \;\; x - 2 < 0 \end{cases}$

cioè:

$y = x + |2 - x| = \begin{cases} 2x - 2 & se \;\; x \geq 2 \\ \;\; 2 & se \;\; x < 2 \end{cases}$