Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2013-2014

21.11.2013
prof. Mimmo Corrado

Prova di Matematica : Sistemi lineari

Durata della prova: 1^h

Alunno: ____ Classe: 2B

1. *Fai un esempio di un sistema lineare di due equazioni in due incognite la cui soluzione è* $(x=-5;\ y=+3)$

2. *Senza risolvere il sistema, determina quale delle seguenti terne è la soluzione:*

$$\begin{cases} 2x+y+3z=9 \\ x+3y+2z=1 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$$

⊡ $(-1;-1;-1)$ ⊡ $(1;\ -1;\ -2)$ ⊡ $(1;\ -2;\ 3)$ ⊡ $(1;\ 2;-3)$

3. *Determina per quale valore del parametro k il sistema è determinato*

$$\begin{cases} x-ky+z=-1 \\ 2x-3y-z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

4. *Risolvi, con i cinque metodi studiati, il seguente sistema di equazioni:*

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)=x^2-y-2 \\ \frac{1}{2}(x+y)=-\frac{1}{3}(x-y-1) \end{cases}$$

5. *Risolvi e discuti il seguente sistema letterale:*

$$\begin{cases} ax+2(x-y)-6=0 \\ x-a\,y=3+y \end{cases}$$

6. *Il caffè Excelsa contiene l'* $1{,}2\%$ *di caffeina e costa* $10€$ *al chilogrammo. Il caffè Robusta contiene l'* $2{,}2\%$ *di caffeina e costa* $6€$ *al chilogrammo. Il caffè Liberica contiene l'* $2{,}6\%$ *di caffeina e costa* $4€$ *al chilogrammo. Quali quantità delle tre qualità sono necessarie per produrre* $20kg$ *di una miscela contenente l'* $1{,}8\%$ *di caffeina al costo di* $7{,}50€$ *al chilogrammo?*

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
	Punti	4	4	7	25	12	18	70

7.

Punti	0 - 2	3 - 7	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42	43 - 47	48 - 52	53 - 57	58 - 62	63 - 67	68 - 70
Voto	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	9½	10

Soluzione

1. *Fai un esempio di un sistema lineare di due equazioni in due incognite la cui soluzione è* $(x = -5;\ y = +3)$

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -8 \end{cases}$$

2. *Senza risolvere il sistema, determina quale delle seguenti terne è la soluzione:*

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + z = -2 \end{cases} \qquad \boxdot\ (1;\ -2;\ 3)$$

3. *Determina per quale valore del parametro k il sistema è determinato*

$$\begin{cases} x - ky + z = -1 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Il sistema è determinato se il determinante della matrice è diverso da zero, cioè: $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -k & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -k \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 6 + k + 2 - (-3 - 1 + 4k) = 8 + k + 4 - 4k = 12 - 3k$$

$D \neq 0 \ \ per \ \ 12 - 3k \neq 0 \quad cioè \quad k \neq 4.$

4. *Risolvi, con i cinque metodi studiati, il seguente sistema di equazioni:*

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) = x^2 - y - 2 \\ \frac{1}{2}(x+y) = -\frac{1}{3}(x - y - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - y - 2 \\ 3(x+y) = -2(x - y - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 3x + 3y = -2x + 2y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + y = -4 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

A. *Metodo di sostituzione*

$$\begin{cases} - \\ \boxed{y = 2 - 5x} \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + 2 - 5x = -4 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} -8x = -6 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y = 2 - 5 \cdot \frac{3}{4} = 2 - \frac{15}{4} = -\frac{7}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

B. *Metodo del confronto*

$$\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = 2 - 5x \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 3x - 4 = 2 - 5x \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 8x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 \cdot \frac{3}{4} - 4 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

C. *Metodo di riduzione*

$$\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 5 \cdot \\ 3 \cdot \end{matrix}\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -15x + 5y = -20 & + \\ +15x + 3y = +6 & = \end{cases}$$

$$8y = -14\,; \qquad y = -\frac{7}{4}$$

$$\begin{cases} -3x + y = -4 & - \\ 5x + y = 2 & = \end{cases}$$

$$-8x \quad = -6\,; \qquad y = \frac{3}{4} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

D. *Metodo di Cramer*

$$\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 5 = -8 \qquad |D_x| = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \qquad |D_y| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 20 = 14$$

$$\left(x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \; ; \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{14}{-8} = -\frac{7}{4} \right)$$

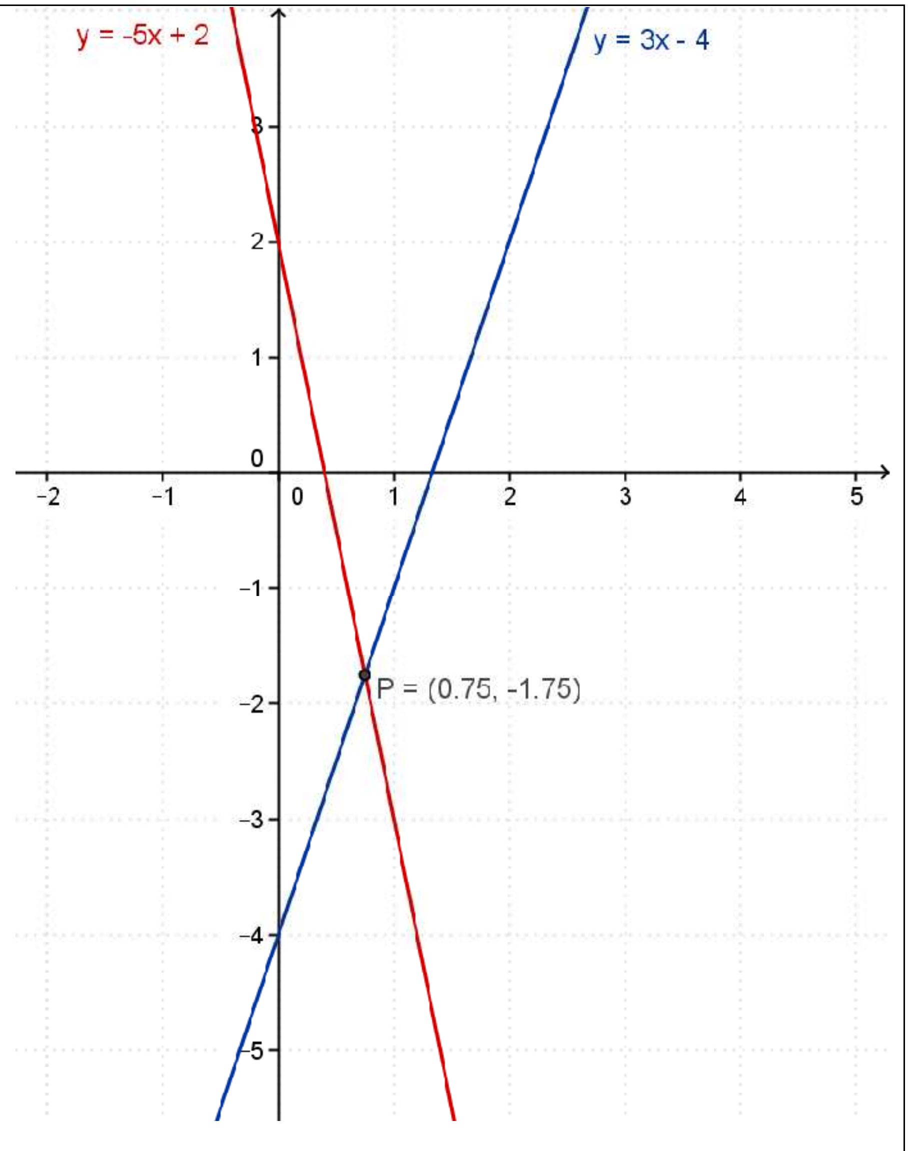
E. *Metodo Grafico*

$-3x + y = -4$

x	y
0	-4
$\frac{4}{3}$	0

$5x + y = 2$

x	y
0	2
$\frac{2}{5}$	0



5. *Risolvi e discuti il seguente sistema letterale:*

$\begin{cases} ax + 2(x-y) - 6 = 0 \\ x - a\,y = 3 + y \end{cases}$ $\begin{cases} ax + 2x - 2y = 6 \\ x - a\,y - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} (a+2)x - 2y = 6 \\ x - (a+1)\,y = 3 \end{cases}$

Il determinante del sistema è: $D = \begin{vmatrix} a+2 & -2 \\ 1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -a^2 - a - 2a - 2 + 2 = -a^2 - 3a$

Il determinante dell'incognita x è: $D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -(a+1) \end{vmatrix} = -6a - 6 + 6 = -6a$

Il determinante dell'incognita y è: $D_y = \begin{vmatrix} a+2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 6 - 6 = 3a$

Discussione:

$Se\ \ D = 0\,,\quad cioè\ se - a^2 - 3a = 0\quad cioè$:

$-a \cdot (a+3) = 0\,;\quad \begin{cases} se\ a = 0 & \Rightarrow\ D = D_x = D_y = 0 & S.indeterminato \\ se\ a = -3 & \Rightarrow\ D = 0 \quad D_x = 18 \quad D_y = -9 & S.impossibile \end{cases}$

$Se\ a \neq 0\ \wedge a \neq -3\ \ il\ sistema\ è\ determinato.\ \ La\ soluzione\ è$: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-6a}{-a \cdot (a+3)} = \dfrac{6}{a+3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3a}{-a \cdot (a+3)} = -\dfrac{3}{a+3} \end{cases}$

Parametro	***Tipo***	***Soluzione***
$a = 0$	$Sistema\ \ indeterminato$	∞
$a = -3$	$Sistema\ \ impossibile$	$\emptyset$
$a \neq 0\quad \wedge\quad a \neq -3$	$Sistema\ determinato$	$\left(x = \dfrac{6}{a+3}\ \ ;\ \ y = -\dfrac{3}{a+3}\right)$

6. *Il caffè Excelsa contiene l'* $1{,}2\%$ *di caffeina e costa* $10€$ *al chilogrammo. Il caffè Robusta contiene l'* $2{,}2\%$ *di caffeina e costa* $6€$ *al chilogrammo. Il caffè Liberica contiene l'* $2{,}6\%$ *di caffeina e costa* $4€$ *al chilogrammo. Quali quantità delle tre qualità sono necessarie per produrre* $20kg$ *di una miscela contenente l'* $1{,}8\%$ *di caffeina al costo di* $7{,}50€$ *al chilogrammo?*

<u>Soluzione</u>

Ponendo:

$quantità\ \ caffè\ \ Excelsa = x$

$quantità\ \ caffè\ \ Robusta\ = y$ *si ha:*

$quantità\ \ caffè\ \ Liberica\ = z$

$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \dfrac{1{,}2}{100}x + \dfrac{2{,}2}{100}y + \dfrac{2{,}6}{100}z = \dfrac{1{,}8}{100} \cdot 20 \\ 10x + 6y + 4z = 7{,}50 \cdot 20 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \dfrac{12}{1000}x + \dfrac{22}{1000}y + \dfrac{26}{1000}z = \dfrac{360}{1000} \\ 10x + 6y + 4z = 150 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 12x + 22y + 26z = 360 \\ 5x + 3y + 2z = 75 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 6x + 11y + 13z = 180 \\ 5x + 3y + 2z = 75 \end{cases}$ .... $\begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \\ z = 5 \end{cases}$

Pertanto per produrre la miscela richiesta occorrono:

$10\,kg\ \ di\ \ caffè\ \ Excelsa$

$5\,kg\ \ di\ \ caffè\ \ Robusta$

$5\,kg\ \ di\ \ caffè\ \ Liberica$