

Alunno: _____ Classe: 2C

24.11.2012
prof. Mimmo Corrado

- Fai un esempio di un sistema lineare di due equazioni in due incognite la cui soluzione è $(x = 3; y = -2)$
- Fai un esempio di un sistema lineare di due equazioni in due incognite impossibile.
- Senza risolvere il sistema, determina quale delle seguenti terne è la soluzione:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ 2x + y - z = -2 \\ x + 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad \square (-1; -1; -1) \quad \square (1; -1; -2) \quad \square (1; -2; 2) \quad \square (3; -1; 2)$$

- Il sistema $\begin{cases} ax - 9y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ risulta determinato se è solo se:
 $a \neq -4$ $a \neq -3$ $a \neq -2$ $a \neq -1$

- Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$$\begin{cases} 6x - 3y - 8 = 0 \\ 1,2x - \frac{3}{5}y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{3-y}{4} \\ (x-y)(x+2) = (x-y+1)(x+1) \end{cases}$$

- Risolvi ed effettua la discussione del seguente sistema letterale:

$$\begin{cases} a(x+y) - y(a-9) = 3 \\ 2(x-1) + ay - x + 1 = 0 \end{cases}$$

- Risolvi il seguente sistema di equazioni con un metodo a tua scelta:

$$\begin{cases} \frac{2y+x-z}{3} + \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \\ 2y - \frac{x+z}{2} - 3 = 0 \\ 2(x-y) - \frac{1}{3}z + 2 = 0 \end{cases}$$

- Calcola il seguente prodotto di matrici (righe x colonne):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- In un trapezio rettangolo ABCD di base maggiore AB, la somma delle basi supera di 80 m l'altezza, la base minore è $i \frac{2}{5}$ della base maggiore, l'altezza è congruente alla differenza delle basi. Calcola l'area del trapezio ABCD. Detto poi P, un punto dell'altezza AD, ed E il punto di intersezione delle rette AB e CP, considera il triangolo BCE. Determina a quale distanza dalla base minore CD si deve fissare il punto P affinché il triangolo BCE sia equivalente ai $\frac{9}{7}$ del trapezio ABCD.
- Quando tu avrai la mia età, io avrò il quadruplo degli anni che tu avevi quando io avevo la tua età e insieme avremo 70 anni. Determinare le età attuali.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti		3	3	3	3	30	7	7	4	10	10

Punti	0 - 3	4 - 8	9 - 13	14 - 19	20 - 25	26 - 31	32 - 37	38 - 43	44 - 49	50 - 55	56 - 61	62 - 67	68 - 72	73 - 77	78 - 80
Voto	2	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

Soluzione

1. Fai un esempio di un sistema lineare di due equazioni in due incognite la cui soluzione è $(x = 3; y = -2)$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

2. Fai un esempio di un sistema lineare di due equazioni in due incognite impossibile.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

3. Senza risolvere il sistema, determina quale delle seguenti terne è la soluzione:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ 2x + y - z = -2 \\ x + 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad \square (-1; -1; -1) \quad \square (1; -1; -2) \quad \square (1; -2; 2) \quad \square (3; -1; 2)$$

La terna soluzione è: $(x = 1; y = -2; z = 2)$

4. $\begin{cases} ax - 9y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \quad |D| = \begin{vmatrix} a & -9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 9$

Il sistema risulta determinato se è solo se $|D| \neq 0$; cioè $3a + 9 \neq 0$; $3a \neq -9$; $a \neq -3$.

5. Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 6x - 3y - 8 = 0 \\ 1,2x - \frac{3}{5}y = 5 \end{cases} \quad \text{moltiplicando la II}^a \text{ equazione per 10 si ha:}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 8 \\ 12x - 6y = 50 \end{cases}$$

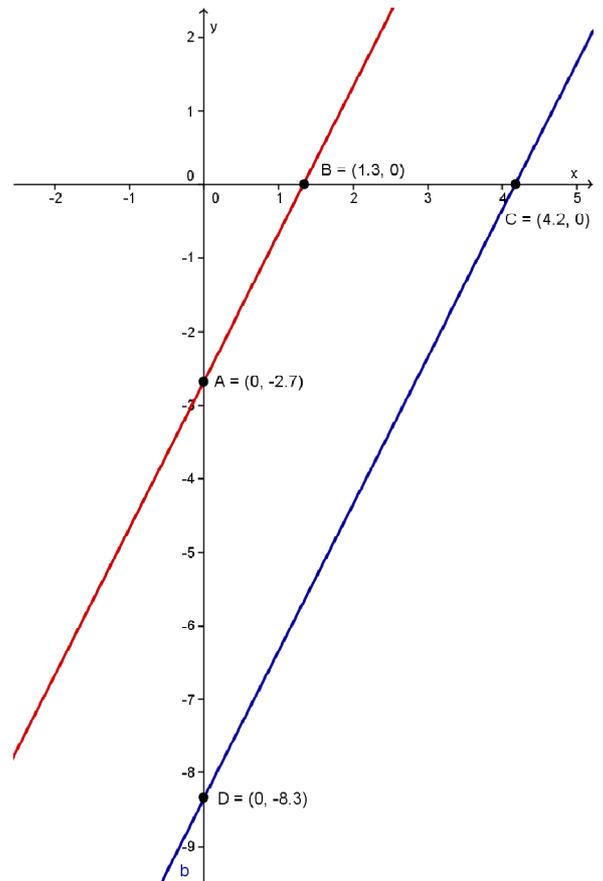
$$\frac{a}{a^I} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \frac{b}{b^I} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \quad \frac{c}{c^I} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Il sistema è impossibile

Metodo Grafico

$$6x - 3y - 8 = 0 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{array}$$

$$12x - 6y = 50 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -\frac{25}{3} \\ \frac{25}{6} & 0 \end{array}$$



Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{3-y}{4} \\ (x-y)(x+2) = (x-y+1)(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2 + 4 = 3 - y \\ x^2 + 2x - xy - 2y = x^2 - xy + x + x - y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \frac{a}{a'} = \frac{2}{0} \quad \frac{b}{b'} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{Il sistema è determinato}$$

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Metodo del confronto

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = 1 - 2x \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{cases} 2x + y = +1 & - \\ y = -1 & = \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$2x = 2; \quad x = 1$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad |D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \quad |D_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \quad |D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

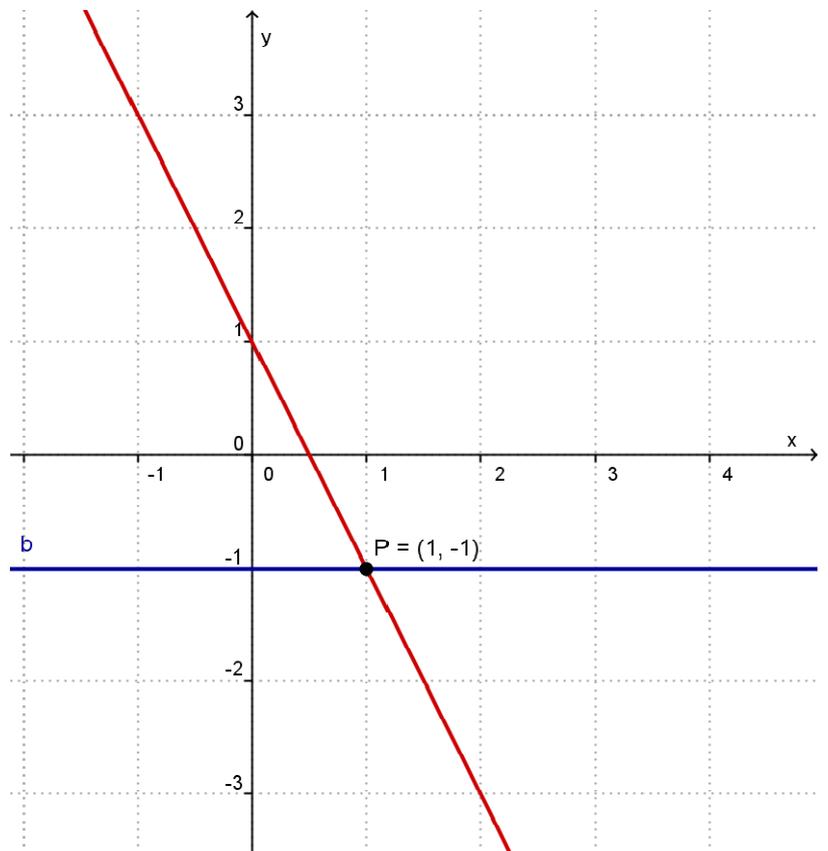
$$\left(x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-2}{2} = -1 \right)$$

Metodo Grafico

$$2x + y = 1 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$y = -1 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{array}$$

$P(1; -1)$



6. Risolvi ed effettua la discussione del seguente sistema letterale:

$$\begin{cases} a(x+y) - y(a-9) = 3 \\ 2(x-1) + ay - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x+y) - y(a-9) = 3 \\ 2(x-1) + ay - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + ay - ay + 9y = 3 \\ 2x - 2 + ay - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 9y = 3 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

Il determinante del sistema è: $|D| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$

Il determinante dell'incognita x è: $|D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 3a - 9$

Il determinante dell'incognita y è: $|D_y| = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 3$

Discussione:

Se $|D| = 0$, cioè se $a^2 - 9 = 0$, $a = \mp 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a = -3 & x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{3 \cdot (-3) - 9}{3^2 - 9} = \frac{-18}{0} \text{ s. impossibile} \\ \text{se } a = +3 & y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{3 \cdot 3 - 9}{3^2 - 9} = \frac{0}{0} \text{ s. indeterminato} \end{cases}$

Se $a \neq \mp 3$ il sistema è determinato, e la soluzione è: $\begin{cases} x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{3a - 9}{a^2 - 9} = \frac{3(a - 3)}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{3}{a + 3} \\ y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{a - 3}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{1}{a + 3} \end{cases}$

7. Risolvi il seguente sistema di equazioni con un metodo a tua scelta:

$$\begin{cases} \frac{2y+x-z}{3} + \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \\ 2y - \frac{x+z}{2} - 3 = 0 \\ 2(x-y) - \frac{1}{3}z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y + 5x - 5z + 3x = 12 \\ 4y - x - z - 6 = 0 \\ 2x - 2y - \frac{1}{3}z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 10y - 5z = 12 \\ -x + 4y - z = 6 \\ 6x - 6y - z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - z - 6 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8(4y - z - 6) + 10y - 5z = 12 \\ 6(4y - z - 6) - 6y - z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32y - 8z - 48 + 10y - 5z = 12 \\ 24y - 6z - 36 - 6y - z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42y - 13z = 60 \\ 18y - 7z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{18}{7}y - \frac{30}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42y - 13\left(\frac{18}{7}y - \frac{30}{7}\right) = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42y - \frac{234}{7}y + \frac{390}{7} = 60 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 294y - 234y + 390 = 420 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60y = 30 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{18}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{30}{7} = \frac{9}{7} - \frac{30}{7} = -\frac{21}{7} = -3 \\ \end{cases}$$

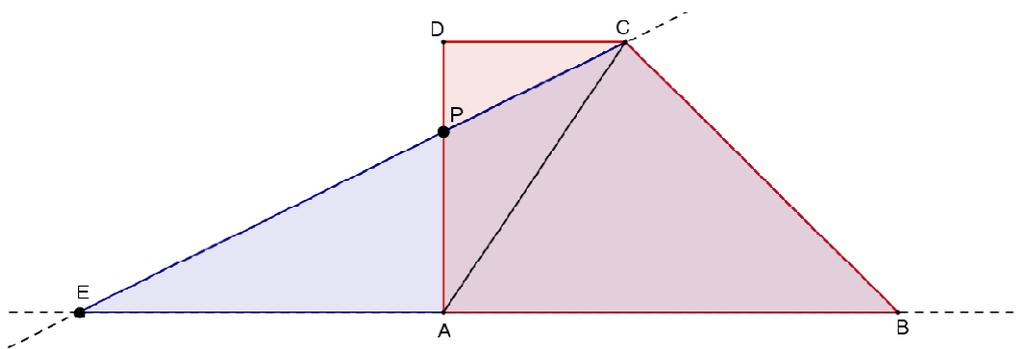
$$\begin{cases} x = 4 \cdot \frac{1}{2} - (-3) - 6 = -1 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -3 \end{cases}$$

8. Calcola il seguente prodotto di matrici (righe x colonne):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 17 & -22 \end{bmatrix}$$

9. In un trapezio rettangolo ABCD di base maggiore AB, la somma delle basi supera di 80 m l'altezza, la base minore è $\frac{2}{5}$ della base maggiore, l'altezza è congruente alla differenza delle basi. Calcola l'area del trapezio ABCD. Detto poi P, un punto dell'altezza AD, ed E il punto di intersezione delle rette AB e CP, considera il triangolo BCE. Determina a quale distanza dalla base minore CD si deve fissare il punto P affinché il triangolo BCE sia equivalente ai $\frac{9}{7}$ del trapezio ABCD.



Soluzione

Poniamo: $\overline{AB} = x$, $\overline{DC} = y$ e $\overline{DH} = z$

si ha:

$$\begin{cases} x + y = z + 80 \\ y = \frac{2}{5}x \\ z = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 80 - \\ - \\ x - y - z = 0 \end{cases} = \quad \begin{matrix} 2y = 80; \\ y = 40 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \cdot 40 = 100 \\ z = 100 - 40 = 60 \end{cases}$$

Pertanto: $\overline{AB} = 100 \text{ m}$ $\overline{DC} = 40 \text{ m}$ $\overline{DH} = 60 \text{ m}$

L'area del trapezio ABCD è: $S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{100+40}{2} \cdot 60 \text{ m}^2 = 4200 \text{ m}^2$

L'area del triangolo BCE è: $S_{BCE} = \frac{9}{7} \cdot S_{ABCD} = \frac{9}{7} \cdot 4200 \text{ m}^2 = 5400 \text{ m}^2$

L'area del triangolo ABC è: $S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{100 \cdot 60}{2} \text{ m}^2 = 3000 \text{ m}^2$

Ponendo $\overline{AP} = X$ con $0 < X < 60$ si ha: $\overline{DP} = 60 - x$

L'area del triangolo ACE è: $S_{ACE} = S_{BCE} - S_{ABC} = (5400 - 3000) \text{ m}^2 = 2400 \text{ m}^2$.

La misura del segmento $\overline{EA} = \frac{2 \cdot S_{ACE}}{\overline{AD}} = \frac{2 \cdot 2400}{60} = 80 \text{ m}$.

Dalla relazione: $S_{APE} + S_{ACP} + S_{ABC} = 5400 \text{ m}^2$ si determina l'incognita X.

$$\frac{\overline{AE} \cdot \overline{AP}}{2} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{DC}}{2} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} = 5400$$

$$\frac{80 \cdot X}{2} + \frac{40 \cdot X}{2} + \frac{100 \cdot 60}{2} = 5400 ;$$

$$40X + 20X + 3000 = 5400 ;$$

$$60X = 5400 - 3000 ;$$

$$60X = 2400 ;$$

$$X = \frac{2400}{60} = 40 \quad \Rightarrow \quad \overline{AP} = 40 \text{ m} \quad \text{e} \quad \overline{PD} = (60 - 40) \text{ m} = 20 \text{ m} .$$

10. Quando tu avrai la mia età, io avrò il quadruplo degli anni che tu avevi quando io avevo la tua età e insieme avremo 70 anni. Determinare le età attuali.

Soluzione

Poniamo la mia età attuale = x e la tua età attuale = y .

Tu avrai la mia età, cioè x anni, fra $(x - y)$ anni. Fra $(x - y)$ anni io avrò $x + (x - y)$ anni, cioè $2x - y$ anni

io avevo la tua età $(x - y)$ anni fa. $(x - y)$ anni fa, tu avevi $y - (x - y)$ anni, cioè $2y - x$ anni.

Pertanto la frase: "quando tu avrai la mia età, io avrò il quadruplo degli anni che tu avevi quando io avevo la tua età" è espressa dall'equazione: $2x - y = 4 \cdot (2y - x)$.

Mentre la frase: "insieme avremo 70 anni" è espressa dall'equazione: $2x - y + x = 70$.

Per determinare le età attuali occorre quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \cdot (2y - x) \\ 2x - y + x = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 8y - 4x \\ 3x - y = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ 3x - y = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ y = 3x - 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 9 \cdot (3x - 70) = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 27x + 630 = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -21x = -630 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 3 \cdot 30 - 70 = 20 \end{cases}$$

La mia età attuale è 30 anni e la tua è 20 anni.