

1. Scrivi i primi 6 termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero irrazionale $2\sqrt{7} - 3$.

2. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $2\sqrt{2}$.

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\left(2^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{9}} : \left(3^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{32}}$$

$$\sqrt[7]{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right)^3 - \left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt[5]{\sqrt{3} - 1}\right)^5}$$

$$\frac{8 + \sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^6} - \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^5}{(\sqrt{2} - 3)^2 \cdot (11 + 6\sqrt{2})}$$

$$(1 + \sqrt{3})^2 + \sqrt{12} - (1 - \sqrt[4]{3}) \cdot (1 + \sqrt[4]{3}) + \sqrt[6]{27}$$

4. Una sola delle seguenti affermazioni relative al numero $x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{(2 - \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{2})}$ è corretta. Quale ?

☐ $x = \frac{11 - \sqrt{2} + 4\sqrt{5} - \sqrt{10}}{7}$ ☐ $x = \frac{11 + \sqrt{2} - 4\sqrt{5} - \sqrt{10}}{7}$ ☐ $x = \frac{-11 + \sqrt{2} - 4\sqrt{5} + \sqrt{10}}{7}$ ☐ $x = 1$

5. Semplifica l'espressione a lato:

- a. utilizzando le operazioni e le proprietà dei radicali
b. trasformandola in una espressione con esponenti frazionari
- verifica l'uguaglianza dei due risultati ottenuti, trasformando il primo risultato in una espressione con esponenti frazionari.

$$\frac{\sqrt[3]{(a-1) \cdot \sqrt{a-1}}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot (\sqrt{a-1})^3}} \quad \text{con } a > 1$$

6. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:

$$\sqrt[4]{112a^4b^8} \quad \sqrt{25x^3 - 75x^2} \quad \sqrt{\frac{4x^3 - 4x^2}{x^2 + 2x + 1}}$$

7. Determina le condizioni di esistenza della seguente espressione:

$$\sqrt[6]{\frac{3x-2}{4-5x}} + 5x \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$$

8. Semplifica la seguente espressione, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\sqrt{\frac{a^6 + 8a^3 + 12a^4 + 6a^5}{a-2}} : \sqrt[3]{\frac{a^6 + 4a^5 + 4a^4}{a^4 + 24a^2 + 16 - 8a^3 - 32a}} : \sqrt[6]{\frac{(a^2 - 4)^5}{a^3}}$$

9. Un rettangolo ha il perimetro di 36 cm. Aumentando la base e l'altezza rispettivamente di $(3 + \sqrt{2})$ cm e $2\sqrt{2}$ cm, il rapporto tra la base e l'altezza non cambia. Determina l'area del rettangolo.

10. Dimostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 7.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti	3	3	16	6	10	9	5	9	10	9	80

Punti	0 - 3	4 - 8	9 - 13	14 - 19	20 - 25	26 - 31	32 - 37	38 - 43	44 - 49	50 - 55	56 - 61	62 - 67	68 - 72	73 - 77	78 - 80
Voto	2	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

1. Scrivi i primi 6 termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero irrazionale $2\sqrt{7} - 3$.

Soluzione

$$2\sqrt{7} - 3 \approx 2,291502622129 \dots$$

$$D = \{2; 2,2; 2,29; 2,291; 2,2915; 2,29150\}$$

$$E = \{3; 2,3; 2,30; 2,292; 2,2916; 2,29151\}$$

2. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $2\sqrt{2}$.

Soluzione

$$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

Tale valore si può ottenere calcolando l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC avente i due cateti uguali a 2.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\left(2^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{9}} : \left(3^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{32}} = 2^{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}} : 3^{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}} = 2^{\sqrt[3]{3^3}} : 3^{\sqrt[3]{2^6}} = 2^3 : 3^{2^2} = \frac{8}{81}$$

$$\sqrt[7]{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right)^3 - \left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt[5]{\sqrt{3} - 1}\right)^5} = \sqrt[7]{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 1} = \sqrt[7]{0} = 0$$

$$\frac{8 + \sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^6} - \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^5}{(\sqrt{2} - 3)^2 \cdot (11 + 6\sqrt{2})} =$$

Occorre fare attenzione a: $\sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^6} = |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2})$ perchè $1 - \sqrt{2} < 0$

$$\frac{8 - (1 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}}{(2 + 9 - 6\sqrt{2}) \cdot (11 + 6\sqrt{2})} = \frac{8 - 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{(11 - 6\sqrt{2}) \cdot (11 + 6\sqrt{2})} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt{3})^2 + \sqrt{12} - (1 - \sqrt[4]{3}) \cdot (1 + \sqrt[4]{3}) + \sqrt[6]{27} = \\ & = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - (1 - \sqrt[4]{3^2}) + \sqrt[6]{3^3} = \\ & = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3 + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. Una sola delle seguenti affermazioni relative al numero $x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{2})}$ è corretta. Quale ?

☐ $x = \frac{11-\sqrt{2}+4\sqrt{5}-\sqrt{10}}{7}$

☐ $x = \frac{11+\sqrt{2}-4\sqrt{5}-\sqrt{10}}{7}$

☐ $x = \frac{-11+\sqrt{2}-4\sqrt{5}+\sqrt{10}}{7}$

☐ $x = 1$

Soluzione

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{2})} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{2})} \cdot \frac{(2+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{10}-5}{(4-5) \cdot (3-\sqrt{2})} = \\ &= \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}+5}{3-\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}+5}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})} = \\ &= \frac{15-6\sqrt{2}+6\sqrt{5}-3\sqrt{10}+5\sqrt{2}-4+2\sqrt{10}-\sqrt{20}}{9-2} = \frac{11-\sqrt{2}+4\sqrt{5}-\sqrt{10}}{7} \end{aligned}$$

5. Semplifica l'espressione a lato:

- a. utilizzando le operazioni e le proprietà dei radicali
b. trasformandola in una espressione con esponenti frazionari

verifica l'uguaglianza dei due risultati ottenuti, trasformando il primo risultato in una espressione con esponenti frazionari.

$$\frac{\sqrt[3]{(a-1) \cdot \sqrt{a-1}}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot (\sqrt{a-1})^3}} \quad \text{con } a > 1$$

Soluzione a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{(a-1) \cdot \sqrt{a-1}}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot (\sqrt{a-1})^3}} &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{(a-1)^2 \cdot (a-1)}}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot \sqrt{(a-1)^3}}} = \frac{\sqrt[6]{(a-1)^3}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot \sqrt{(a-1)^3}}} = \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot \sqrt{(a-1)^3}}} = \\ &= \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot (a-1) \cdot \sqrt{a-1}}} = \frac{1}{(a-1) \cdot \sqrt[7]{(a-1)^4}} = \frac{1}{(a-1) \cdot \sqrt[7]{(a-1)^4}} \cdot \frac{\sqrt[7]{(a-1)^3}}{\sqrt[7]{(a-1)^3}} = \\ &= \frac{\sqrt[7]{(a-1)^3}}{(a-1) \cdot \sqrt[7]{(a-1)^7}} = \frac{\sqrt[7]{(a-1)^3}}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

Soluzione b

$$\frac{\sqrt[3]{(a-1) \cdot \sqrt{a-1}}}{\sqrt[7]{(a-1)^4 \cdot (\sqrt{a-1})^3}} = \frac{\left[(a-1) \cdot (a-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}}{(a-1)^{\frac{4}{7}} \cdot (a-1)^{\frac{3}{14}}} = \frac{\left[(a-1)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}}{(a-1)^{\frac{29}{14}}} = \frac{(a-1)^{\frac{1}{2}}}{(a-1)^{\frac{29}{14}}} = (a-1)^{\frac{1}{2} - \frac{29}{14}} = (a-1)^{-\frac{11}{7}} \text{ .}$$

Soluzione c

$$\frac{\sqrt[7]{(a-1)^3}}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)^{\frac{3}{7}}}{(a-1)^2} = (a-1)^{\frac{3}{7}-2} = (a-1)^{-\frac{11}{7}} \text{ .}$$

6. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:

$$\sqrt[4]{112a^4b^8} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 7 \cdot a^4 b^8} = 2|a|b^2\sqrt[4]{7}.$$

$$\begin{aligned}\sqrt{25x^3 - 75x^2} &= \sqrt{25x^2 \cdot (x - 3)} = \quad C.E.: 25x^2 \cdot (x - 3) \geq 0 \quad \dots \quad x = 0 \quad \vee \quad x \geq 3. \\ &= 5x\sqrt{x - 3} \quad \text{con } C.E.: x = 0 \quad \vee \quad x \geq 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{4x^3 - 4x^2}{x^2 + 2x + 1}} &= \sqrt{\frac{4x^2(x - 1)}{(x + 1)^2}} = \quad C.E.: \frac{4x^2(x - 1)}{(x + 1)^2} \geq 0 \quad \begin{array}{l} 4x^2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ (x + 1)^2 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall x \in R \\ x \geq 1 \\ x \neq -1 \end{array} \quad \dots \quad x = 0 \quad \vee \quad x \geq 1. \\ &= \frac{2x}{x + 1}\sqrt{x - 1} \quad \text{con } C.E.: x = 0 \quad \vee \quad x \geq 1.\end{aligned}$$

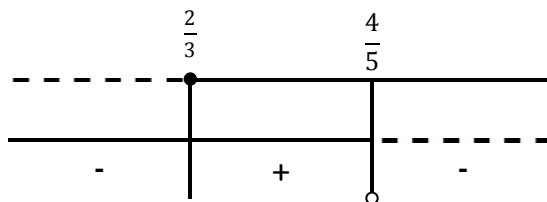
7. Determina le condizioni di esistenza della seguente espressione: $\sqrt[6]{\frac{3x-2}{4-5x}} + 5x\sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$

Soluzione

$$\frac{3x - 2}{4 - 5x} \geq 0;$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2 \geq 0 \\ 4 - 5x > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \geq \frac{2}{3} \\ x < \frac{4}{5} \end{array}$$



L'insieme delle soluzioni è dato da:

$$\frac{2}{3} \leq x < \frac{4}{5}$$

8. Semplifica la seguente espressione, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\sqrt{\frac{a^6 + 8a^3 + 12a^4 + 6a^5}{a - 2}} : \sqrt[3]{\frac{a^6 + 4a^5 + 4a^4}{a^4 + 24a^2 + 16 - 8a^3 - 32a}} : \sqrt[6]{\frac{(a^2 - 4)^5}{a^3}}$$

$$\begin{aligned}a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16 &= \\ &= (a - 2)(a^3 - 6a^2 + 12a - 8) = \\ &= (a - 2)(a - 2)^3 = (a - 2)^4\end{aligned}$$

1	-8	24	-32	16
2	2	-12	24	-16
1	-6	12	-8	=

$$\begin{aligned}a^6 + 8a^3 + 12a^4 + 6a^5 &= a^3(a^3 + 8 + 12a + 6a^2) = a^3(a + 2)^3 \\ a^6 + 4a^5 + 4a^4 &= a^4(a^2 + 4a + 4) = a^4(a + 2)^2\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{a^3(a + 2)^3}{a - 2}} : \sqrt[3]{\frac{a^4(a + 2)^2}{(a - 2)^4}} : \sqrt[6]{\frac{(a + 2)^5 \cdot (a - 2)^5}{a^3}} =$$

$$= \sqrt[12]{\frac{a^{18}(a + 2)^{18}}{(a - 2)^6} \cdot \frac{(a - 2)^{16}}{a^{16}(a + 2)^8} \cdot \frac{a^6}{(a + 2)^{10} \cdot (a - 2)^{10}}} = \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}.$$

9. Un rettangolo ha il perimetro di 36 cm. Aumentando la base e l'altezza rispettivamente di $(3 + \sqrt{2})$ cm e $2\sqrt{2}$ cm, il rapporto tra la base e l'altezza non cambia. Determina l'area del rettangolo.

Soluzione

Ponendo la base = x e l'altezza = y , con $x > 0$ e $y > 0$, si ha:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{x + 3 + \sqrt{2}}{y + 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x + y) = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot (y + 2\sqrt{2}) = y \cdot (x + 3 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y + 2\sqrt{2}x = y \cdot x + 3y + \sqrt{2}y \\ y = 18 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot (18 - x) + 2\sqrt{2}x = (18 - x) \cdot x + 3(18 - x) + (18 - x)\sqrt{2} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x - x^2 + 2\sqrt{2}x = 18x - x^2 + 54 - 3x + 18\sqrt{2} - \sqrt{2}x \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} +2\sqrt{2}x + 3x + \sqrt{2}x = 54 + 18\sqrt{2} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3 + 3\sqrt{2})x = 54 + 18\sqrt{2} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{54 + 18\sqrt{2}}{3 + 3\sqrt{2}} = \frac{18 + 6\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{18 - 18\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 12}{1 - 2} = \frac{6 - 12\sqrt{2}}{-1} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12\sqrt{2} - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18 - x = 18 - 12\sqrt{2} + 6 = 24 - 12\sqrt{2} \end{cases}$$

Pertanto l'area del rettangolo è: $S = x \cdot y = (12\sqrt{2} - 6)(24 - 12\sqrt{2}) = 288\sqrt{2} - 288 - 144 + 72\sqrt{2} = 360\sqrt{2} - 432$

10. Dimostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 7.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista un numero razionale $\frac{a}{b}$ tale che: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7$ con $a, b \in \mathbb{N}$ e a e b primi tra loro.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 7; \quad (*) \quad a^2 = 7 \cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 \text{ è multiplo di } 7 \quad \Rightarrow \quad a \text{ è multiplo di } 7.$$

Se a è multiplo di 7 si può scrivere: $a = 7 \cdot k$.

Sostituendo tale espressione nell'equazione (*) si ottiene:

$$(7k)^2 = 7 \cdot b^2; \quad 49k^2 = 7 \cdot b^2; \quad 7k^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 \text{ è multiplo di } 7 \quad \Rightarrow \quad b \text{ è multiplo di } 7 \text{ e si può scrivere: } b = 7 \cdot h.$$

Pertanto si ha: $\frac{a}{b} = \frac{7k}{7h}$ e ciò è un assurdo, perché per ipotesi a e b erano primi tra loro, invece in questa eguaglianza sono entrambi divisibili per 7.