Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Polinomi

20.12.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 1C

1. Completa la seguente tabella.

Polinomio	Grado	Grado rispetto a x	Termine noto	Completo rispetto a x	Omogeneo	Ordinato rispetto a x
$5ax^5 - a^2x^3 + ax - 6$				SI NO	SI NO	SI NO

2. Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni:

   Il polinomio $x^{2n} + x^{2n-2}y^2 + y^{2n}$ non è omogeneo   V   F

   Il polinomio $x^2 + y^2 + xy - y^2$ è scritto in forma normale   V   F

3. Calcola il valore numerico della seguente espressione, in corrispondenza dei valori delle variabili indicati:

$$\left[\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a}{b}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{a-b}{a+b}\right)\right] : \frac{a-b}{a+b} \qquad a = -\frac{2}{3} \quad e \quad b = 2$$

4. Calcola i seguenti prodotti notevoli:

$(3x^3 - 2y^2)\cdot(3x^3 + 2y^2)$ $(3x^3 - 2y^2)^2$ $\left(3x - \frac{1}{2}xy + 3y^2\right)^2$

$(3x^3 - 2y^2)^3$ $(3x^3 - 2y^2)^4$ $(2x^{n+1} + xy^{2n})^3$

5. Completa le seguenti uguaglianze:

$(\dots + 5y^3)\cdot(3x^7 - \dots) = \dots - 25y^6$ $36x^6 + \cdots - \dots = (\dots - 2xz^3)^2$

$8x^3 + 6x^4y + \frac{3}{2}x^5y^2 + \dots = (\dots + \dots)^3$ $4a^2 + 4b^{10} + \dots - \dots - \dots + \dots = \left(\dots - \frac{3}{2}ab + \dots \right)^2$

6. Semplifica le seguenti espressioni utilizzando, quando è possibile, i prodotti notevoli:

$(4x^2 + 3xy + 1)^2 - (3xy - 4x^2)\cdot(4x^2 + 3xy)$ $8 + 4(3x^2 + 1)\cdot(3x^2 - 1) - [(x-1)^3 - (x+1)^3]^2$

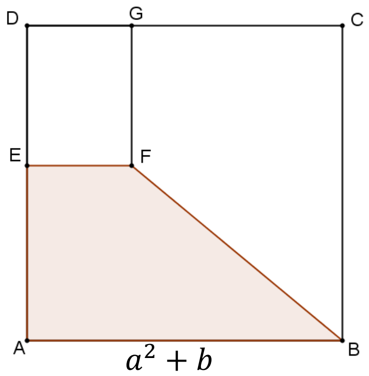
$(3x+1)^3 - 3x\cdot(3x+1)^2 - (5x^2 - 3x)$ $\left[\frac{3}{2}ab\left(\frac{1}{2}b - a\right) + \left(\frac{1}{2}b - a\right)^3\right]\cdot\left(a^3 + \frac{1}{8}b^3\right) - \left(-\frac{1}{4}b^2\right)^3$

7. Determina quoziente e resto della divisione: $(3x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 6x - 1) : (x^2 + 3x - 2)$ ed esegui la prova.

8. Utilizzando la regola di Ruffini effettua la seguente divisione: $(12x^3 + x^2 + 2) : (4x + 1)$ ed esegui la prova.

9. Dimostra che la differenza dei quadrati di due numeri naturali dispari consecutivi è sempre pari .

10. Il lato del quadrato in figura misura $a^2 + b$. Il rettangolo al suo interno ha la base uguale a $\frac{1}{3}$ del lato del quadrato e l'altezza è uguale a $a^2 - b$. Scrivi l'espressione che rappresenta l'area del trapezio e semplificala.



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti	3	2	8	9	6	20	8	8	8	8	80

Punti	0 - 3	4 - 8	9 - 13	14 - 19	20 - 25	26 - 31	32 - 37	38 - 43	44 - 49	50 - 55	56 - 61	62 - 67	68 - 72	73 - 77	78 - 80
Voto	2	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

Soluzione

1. Completa la seguente tabella.

Polinomio	Grado	Grado rispetto a x	Termine noto	Completo rispetto a x	Omogeneo	Ordinato rispetto a x
$5ax^5 - a^2x^3 + ax - 6$	6	5	-6	NO	NO	SI

2. Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni:

Il polinomio $x^{2n} + x^{2n-2}y^2 + y^{2n}$ non è omogeneo V

Il polinomio $x^2 + y^2 + xy - y^2$ è scritto in forma normale F

3. Calcola il valore numerico della seguente espressione, in corrispondenza dei valori delle variabili indicati:

$$\left[\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\right]:\ \frac{a-b}{a+b} \qquad a=-\frac{2}{3} \quad e \quad b=2$$

Soluzione

$$\left[\left(\frac{-\frac{2}{3}+2}{-\frac{2}{3}-2}+\frac{-\frac{2}{3}}{2}\right):\left(\frac{-\frac{2}{3}}{2}+\frac{-\frac{2}{3}-2}{-\frac{2}{3}+2}\right)\right]:\frac{-\frac{2}{3}-2}{-\frac{2}{3}+2} = \left[\left(\frac{\frac{-2+6}{3}}{\frac{-2-6}{3}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{-2-6}{3}}{\frac{-2+6}{3}}\right)\right]:\frac{\frac{-2-6}{3}}{\frac{-2+6}{3}} =$$

$$= \left[\left(\frac{\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}+\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}\right)\right]:\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \left[\left(\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\right]:\left[\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}\right] =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}-2\right)\right]:(-2) = \left[\left(\frac{-3-2}{6}\right):\left(\frac{-1-6}{3}\right)\right]:(-2) =$$

$$= \left[\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{7}{3}\right)\right]:(-2) = \left[\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\right]:(-2) = \frac{5}{14}:(-2) = \frac{5}{14}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{28}\,.$$

4. Calcola i seguenti prodotti notevoli:

$(3x^3-2y^2)\cdot(3x^3+2y^2) = 9x^6-4y^4$

$(3x^3-2y^2)^2 = 9x^6+4y^4-12x^3y^2$

$\left(3x-\frac{1}{2}xy+3y^2\right)^2 = 9x^2+\frac{1}{4}x^2y^2+9y^4-3x^2y+18xy^2-3xy^3$

$(3x^3-2y^2)^3 = 27x^9-8y^6-54x^6y^2+36x^3y^4$

$(3x^3-2y^2)^4 = 81x^{12}-216x^9y^2+216x^6y^4-96x^3y^6+16y^8$

$(2x^{n+1}+xy^{2n})^3 = 8x^{3n+3}+x^3y^{6n}+12x^{2n+3}y^{2n}+6x^{n+3}y^{4n}$

5. Completa le seguenti uguaglianze:

$(3x^7+5y^3)\cdot(3x^7-5y^3) = 9x^{14}-25y^6$

$36x^6+4x^2z^6-24x^4z^3 = (6x^3-2xz^3)^2$

$8x^3+6x^4y+\frac{3}{2}x^5y^2+\frac{1}{8}x^6y^3 = \left(2x+\frac{1}{2}x^2y\right)^3$

$4a^2+4b^{10}+\frac{9}{4}a^2b^2-6a^2b-6ab^6+8ab^5 = \left(2a-\frac{3}{2}ab+2b^5\right)^2$

6. Semplifica le seguenti espressioni utilizzando, quando è possibile, i prodotti notevoli:

$(4x^2+3xy+1)^2-(3xy-4x^2)\cdot(4x^2+3xy)$

$= \ 16x^4+9x^2y^2+1+24x^3y+8x^2+6xy-(9x^2y^2-16x^4) \ =$

$= \ 16x^4+9x^2y^2+1+24x^3y+8x^2+6xy-9x^2y^2+16x^4 \ =$

$= \ 32x^4+24x^3y+8x^2+6xy+1$.

$8+4(3x^2+1)\cdot(3x^2-1)-[(x-1)^3-(x+1)^3]^2$

$= \ 8+4(9x^4-1)-[x^3-3x^2+3x-1-(x^3+3x^2+3x+1)]^2 \ =$

$= \ 8+36x^4-4- \ [x^3-3x^2+3x-1-x^3-3x^2-3x-1]^2 =$

$= 36x^4+4- \ [-6x^2-2]^2 \ =$

$= \ 36x^4+4-36x^4-4-24x^2 \ =$

$= -24x^2$.

$(3x+1)^3-3x\cdot(3x+1)^2-(5x^2-3x)$

$= 27x^3+27x^2+9x+1-3x\cdot(9x^2+6x+1)^2-5x^2+3x =$

$= 27x^3+27x^2+9x+1-27x^3-18x^2-3x-5x^2+3x =$

$= 4x^2+9x+1 =$

$$\left[\frac{3}{2}ab\left(\frac{1}{2}b-a\right)+\left(\frac{1}{2}b-a\right)^3\right]\cdot\left(a^3+\frac{1}{8}b^3\right)-\left(-\frac{1}{4}b^2\right)^3 \ =$$

$$= \ \left[+\frac{3}{4}ab^2-\frac{3}{2}a^2b+\frac{1}{8}b^3-\frac{3}{4}ab^2+\frac{3}{2}a^2b-a^3\right]\cdot\left(a^3+\frac{1}{8}b^3\right)-\left(-\frac{1}{64}b^6\right) \ =$$

$$= \ \left[\frac{1}{8}b^3-a^3\right]\cdot\left(\frac{1}{8}b^3+a^3\right)-\left(-\frac{1}{64}b^6\right) \ =$$

$$= \ \frac{1}{64}b^6-a^6+\frac{1}{64}b^6 \ =$$

$$= \ \frac{1}{32}b^6-a^6 .$$

7. Determina quoziente e resto della divisione: $(3x^4+8x^3-8x^2+6x-1):(x^2+3x-2)$ ed esegui la prova.

Soluzione

$$
\begin{array}{ccccc|l}
+3x^4 & +8x^3 & -8x^2 & +6x & -1 & x^2+3x-2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & -9x^3 & +6x^2 & & & 3x^2-x+1 \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & -2x^2 & & & \\
 & +x^3 & +3x^2 & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & & +x^2 & +4x & & \\
 & & -x^2 & -3x & +2 & \\ \cline{2-5}
 & & & +x & +1 &
\end{array}
$$

$Q(x)=3x^2-x+1 \qquad R(x)=x+1$

Prova

$Quoziente \cdot Divisore + Resto = Dividendo$

$(3x^2-x+1)\cdot(x^2+3x-2)+x+1 =$

$= 3x^4+9x^3-6x^2-x^3-3x^2+2x+x^2+3x-2+x+1 =$

$= 3x^4+8x^3-8x^2+6x-1\,.$

8. Utilizzando la regola di Ruffini effettua la seguente divisione: $(12x^3+x^2+2):(4x+1)$ ed esegui la prova.

Soluzione

Dividendo tutti i termini per 4 si ha:

$\left(3x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right):\left(x+\frac{1}{4}\right)$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{4} & & -\frac{3}{4} & +\frac{1}{8} & \frac{1}{32} \\ \hline
 & 3 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{8} & \frac{15}{32}
\end{array}
$$

$$Q=3x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8} \qquad R=\frac{15}{32}\cdot 4=\frac{15}{8}$$

Prova

$Quoziente \cdot Divisore + Resto = Dividendo$

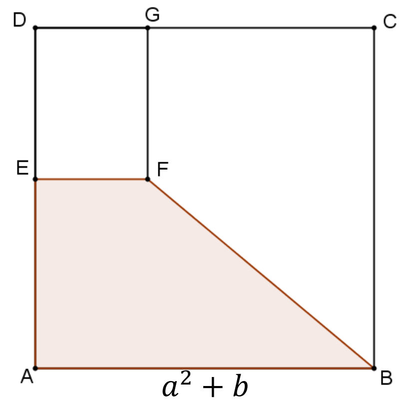
$\left(3x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)\cdot(4x+1)+\frac{15}{8} = 12x^3+3x^2-2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}+\frac{15}{8} = 12x^3+x^2+2\,.$

9. Dimostra che la differenza dei quadrati di due numeri naturali dispari consecutivi è sempre pari .

Soluzione

$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 \quad = \quad 4n^2 + 1 + 4n - 4n^2 - 1 + 4n \quad = \quad 8n$ che rappresenta un numero pari.

10. Il lato del quadrato in figura misura $a^2 + b$. Il rettangolo al suo interno ha la base uguale a $\frac{1}{3}$ del lato del quadrato e l'altezza è uguale a $a^2 - b$. Scrivi l'espressione che rappresenta l'area del trapezio e semplificala.



Soluzione

$\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE} = a^2 + b - (a^2 - b\ ) = 2b$.

$$S \ = \ \frac{\overline{AB} + \overline{EF}}{2} \cdot \overline{AE} \ = \ \frac{1}{2}\left[(a^2+b) + \frac{1}{3}(a^2+b)\right] \cdot 2b \ = \ \left[\frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}b\right] \cdot b \ = \ \frac{4}{3}a^2 b + \frac{4}{3}b^2$$