Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Insiemi e logica

22.11.2012

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 1C

1. Dato l'insieme universo $U = \{x \in N \mid x < 17\}$ e gli insiemi
   $A = \{x \mid x = 2n \ \wedge \ n \leq 5 \ \wedge \ n \in N\}$ $\quad B = \{x \in N \mid 2 \leq x < 8\}$ $\quad C = \{x \mid x = 4n \ \wedge \ n < 5 \ \wedge \ n \in N\}$
   dopo averli rappresentati in un unico diagramma di Eulero-Venn, determina:
   $A \cup B$ $\quad (C \cap B) - A$ $\quad A \Delta B$ $\quad \bar{A} \cap \bar{C}$ $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. In una scuola di 400 studenti, il 50% degli studenti gioca a calcio, il 30% gioca a pallavolo e il 30% non gioca né a calcio, nè a pallavolo. Quanti studenti giocano solo a calcio ? Quanti studenti giocano sia a calcio sia a pallavolo ?

3. I 212 soci di una associazione votano per eleggere il presidente. Ci sono tre candidati A, B e C e ognuno può votare più di un candidato. Allo spoglio risultano 30 schede bianche, non ci sono schede nulle, in 7 schede sono indicati tutti e tre i candidati, in 18 sono indicati i candidati A e B, in 43 è indicato solo A, in 5 solo B, in 8 solo B e C, in 19 solo A e C. Quanti hanno votato solo C ? Chi è il presidente ?

4. Determinare il valore di verità delle seguenti proposizioni:

"6 è un numero pari e il Po bagna Roma"	V	F
"Non è vero che Roma non è in Italia"	V	F
"Non è vero che 3 è pari e maggiore di 1"	V	F
"Se $3 > 4$ allora 3 è un numero pari"	V	F

5. Determina la negazione delle seguenti proposizioni:
   p: "Mario gioca a calcio e a tennis"
   r: "Tutti gli studenti della 1C sono maschi"
   q: "se esco presto dal lavoro, vengo a cena da te"
   s: "Qualche studente della I C ha gli occhiali"

6. Date le proposizioni: p:"Milano è in Francia" q:"La Senna bagna Parigi" r:"Il triangolo ha 4 lati" , esprimi in linguaggio naturale la proposizione $(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$ e determina il suo valore di verità.

7. Dimostra, sia mediante la costruzione della tavola di verità sia applicando le proprietà dei connettivi che la proposizione $p \wedge (\overline{p \vee q})$ è una contraddizione.

8. Dimostra, sia mediante la costruzione della tavola di verità sia applicando le proprietà dei connettivi la seguente equivalenza logica: $\overline{p \vee (q \wedge r)} = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{r})$. Costruisci in seguito il circuito elettrico corrispondente.

9. Stabilisci se il seguente ragionamento è corretto:

   Mangio e bevo
   Se bevo non parlo
   ___
   Se parlo non mangio

10. In un sacchetto ci sono alcune biglie. Maria dice: "Nel sacchetto ci sono in tutto tre biglie e sono nere". Luca dice: "Nel sacchetto ci sono due biglie nere e due biglie rosse". Giorgio dice: "Nel sacchetto ci sono solo biglie nere". Sapendo che uno solo dei tre ha mentito, quante biglie ci sono nel sacchetto?

    1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ quattro $\quad$ non si può rispondere (dati insufficienti)

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti	10	8	10	4	4	4	8	12	10	10	80

Punti	0 - 3	4 - 8	9 - 13	14 - 19	20 - 25	26 - 31	32 - 37	38 - 43	44 - 49	50 - 55	56 - 61	62 - 67	68 - 72	73 - 77	78 - 80
Voto	2	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

Soluzione

1. Dato l'insieme universo $U = \{x \in N \mid x < 17\}$ e gli insiemi
$A = \{x \mid x = 2n \ \wedge \ n \leq 5 \ \wedge \ n \in N\}$ $\quad B = \{x \in N \mid 2 \leq x < 8\}$ $\quad C = \{x \mid x = 4n \ \wedge \ n < 5 \ \wedge \ n \in N\}$
dopo averli rappresentati in un unico diagramma di Eulero-Venn, determina:
$A \cup B$ $\quad (C \cap B) - A$ $\quad A \Delta B$ $\quad \bar{A} \cap \bar{C}$ $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{0, 4, 8, 12, 16\}$

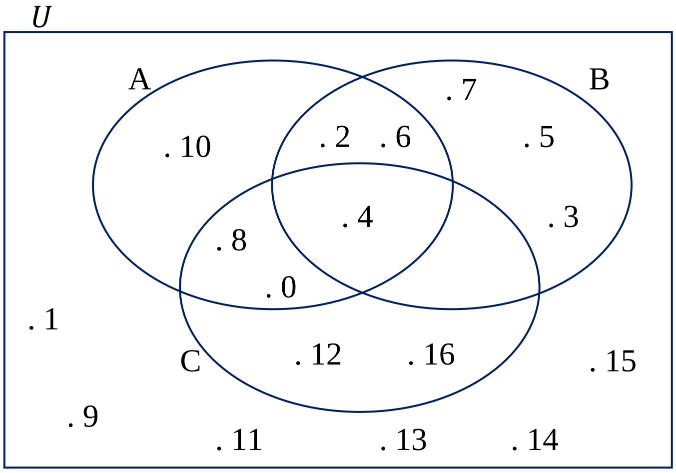
$A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 3, 5, 7\}$

$(C \cap B) - A = \{\ \}$

$A \Delta B = \{0, 8, 10, 3, 5, 7\}$

$\bar{A} \cap \bar{C} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

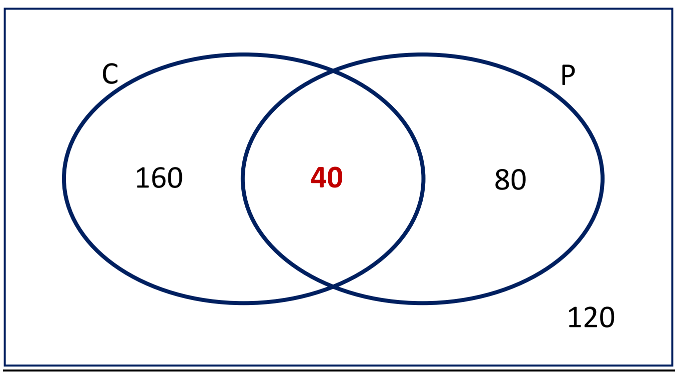


2. In una scuola di 400 studenti, il 50% degli studenti gioca a calcio, il 30% gioca a pallavolo e il 30% non gioca né a calcio, nè a pallavolo. Quanti studenti giocano solo a calcio? Quanti studenti giocano sia a calcio sia a pallavolo?

<u>*Soluzione*</u>

$|U| = 400$

$$Dati \begin{cases} |U| = 400 \\ |C| = 50\% \cdot 400 = 200 \\ |P| = 30\% \cdot 400 = 120 \\ |\overline{C \cup P}| = 30\% \cdot 400 = 120 \end{cases}$$



$|C \cup P| = |U| - |\overline{C \cup P}| = 400 - 120 = 280$

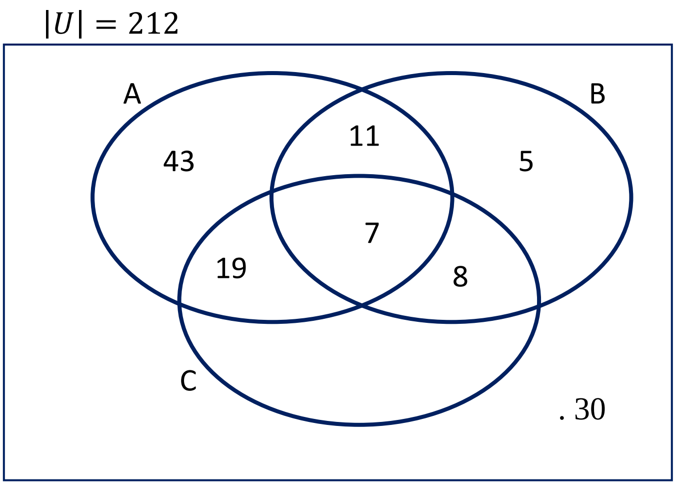
$|C \cap P| = |C| + |P| - |C \cup P| = 200 + 120 - 280 = 40$ *40 studenti giocano sia a calcio sia a pallavolo.*

$|C - P| = |C| - |C \cap P| = 200 - 40 = 160$ *160 studenti giocano solo a calcio.*

3. I 212 soci di una associazione votano per eleggere il presidente. Ci sono tre candidati A, B e C e ognuno può votare più di un candidato. Allo spoglio risultano 30 schede bianche, non ci sono schede nulle, in 7 schede sono indicati tutti e tre i candidati, in 18 sono indicati i candidati A e B, in 8 solo B e C, in 19 solo A e C, in 43 è indicato solo A, in 5 solo B. Quanti hanno votato solo C? Chi è il presidente?

<u>*Soluzione*</u>

$$Dati \begin{cases} |U| = 212 \\ |\overline{A \cup B \cup C}| = 30 \\ |A \cap B \cap C| = 7 \\ |A \cap B| = 18 \\ |(B \cap C) - A| = 8 \\ |(A \cap C) - B| = 19 \\ |A - (B \cup C)| = 43 \\ |B - (A \cup C)| = 5 \end{cases}$$



$|A| = 43 + 11 + 7 + 19 = 80$ *Il candidato A ha ottenuto 80 voti.*

$|B| = 11 + 7 + 5 + 8 = 31$ *Il candidato B ha ottenuto 31 voti.*

$|C - (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| - |\overline{A \cup B \cup C}| = 212 - 93 - 30 = 89$ *89 persone hanno votato solo il candidato C .*

$|C| = 89 + 19 + 7 + 8 = 123$ *Il candidato C ha ottenuto 123 voti.*

Pertanto è stato eletto presidente il candidato C.

4. Determinare il valore di verità delle seguenti proposizioni:

"6 è un numero pari e il Po bagna Roma"	V	F ■
"Non è vero che Roma non è in Italia"	V ■	F ☐
"Non è vero che 3 è pari e maggiore di 1"	V ■	F ☐
"Se 3 > 4 allora 3 è un numero pari"	V ■	F ☐

5. Determina la negazione delle seguenti proposizioni:

p: "Mario gioca a calcio e a tennis"

$\overline{p}$: "Mario non gioca a calcio o non gioca a tennis"

r: "Tutti gli studenti della 1C sono maschi"

$\bar{r}$: "Almeno uno studente della 1C non è maschio"

q: "se esco presto dal lavoro, vengo a cena da te"

$\overline{q}$: "esco presto dal lavoro e non vengo a cena da te"

s: "Qualche studente della I C ha gli occhiali"

$\bar{s}$: "Tutti gli studenti della I C non hanno gli occhiali"

6. Date le proposizioni: p:"Milano è in Francia" q:"La Senna bagna Parigi" r:"Il triangolo ha 4 lati" , esprimi in linguaggio naturale la proposizione $(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$ e determina il suo valore di verità.

<u>*Soluzione*</u>

$(p \wedge q) \wedge \bar{r}$: "Se Milano è in Francia e la Senna bagna Parigi allora il triangolo non ha 4 lati" è una proposizione vera. Infatti costruendo la relativa tavola di verità si ha:

p	q	r	$\bar{r}$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$
F	V	F	V	F	V

7. Dimostra, sia mediante la costruzione della tavola di verità sia applicando le proprietà dei connettivi che la proposizione $p \wedge \overline{(p \vee q)}$ è una contraddizione.

Soluzione

p	q	$p \vee q$	$\overline{(p \vee q)}$	$p \wedge \overline{(p \vee q)}$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

$p \wedge \overline{(p \vee q)} =$ applicando De Morgan

$= p \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) =$ applicando la proprietà associativa

$= (p \wedge \bar{p}) \wedge \bar{q} =$ applicando il principio di non contraddizione

$= (F) \wedge \bar{q} =$ ricordando che la congiunzione è vera soltanto se le due proposizioni sono entrambe vere

$= (F).$

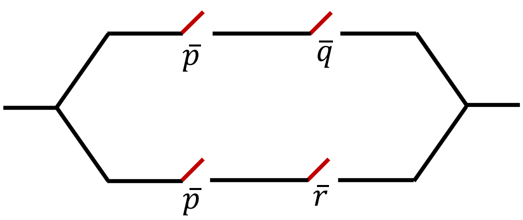
8. Dimostra, sia mediante la costruzione della tavola di verità sia applicando le proprietà dei connettivi la seguente equivalenza logica: $\overline{p \vee (q \wedge r)} = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{r})$. Costruisci poi il circuito elettrico corrispondente.

Soluzione

$$\overline{p \vee (q \wedge r)} = \bar{p} \wedge \overline{(q \wedge r)} = \bar{p} \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{r})$$

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$\overline{p \vee (q \wedge r)}$
V	V	V	F	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V

$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{r}$	$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{r})$
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V



9. Stabilisci se il seguente ragionamento è corretto:

Mangio e bevo
Se bevo non parlo

Se parlo non mangio

Le proposizioni elementari sono: a:"mangio" b: "bevo" c: "parlo"

Il relativo schema di deduzione è:

$$\frac{\begin{array}{c} a \wedge b \\ b \rightarrow \bar{c} \end{array}}{c \rightarrow \bar{a}}$$

In simboli: $[(a \wedge b) \wedge (b \rightarrow \bar{c})] \Longrightarrow (c \rightarrow \bar{a})$

Dall'esame della tavola di verità, si osserva che:

nell'unico caso in cui la premessa $(a \wedge b) \wedge (b \rightarrow \bar{c})$ è vera,

anche la conseguenza logica $c \rightarrow \bar{a}$ è vera

Pertanto il ragionamento è corretto.

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$a \wedge b$	$b \rightarrow \bar{c}$	$(a \wedge b) \wedge (b \rightarrow \bar{c})$	$c \rightarrow \bar{a}$
V	V	V	F	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V

10. In un sacchetto ci sono alcune biglie. Maria dice: "Nel sacchetto ci sono in tutto tre biglie e sono nere". Luca dice: "Nel sacchetto ci sono due biglie nere e due biglie rosse". Giorgio dice: "Nel sacchetto ci sono solo biglie nere". Sapendo che uno solo dei tre ha mentito, quante biglie ci sono nel sacchetto?

1 2 3 quattro non si può rispondere con certezza

<u>Soluzione</u>

Se fosse Maria a mentire, allora Luca e Giorgio dovrebbero dire la verità. Ma le affermazioni di Luca e Giorgio sono in contraddizione. Pertanto Maria non mente.

Se fosse Giorgio a mentire, allora Maria e Luca dovrebbero dire la verità. Ma le affermazioni di Maria e Luca sono in contraddizione. Pertanto Giorgio non mente.

Se fosse Luca a mentire, allora Maria e Giorgio dovrebbero dire la verità. Le affermazioni di Maria e Giorgio non sono in contraddizione. Pertanto Luca mente.

Si conclude pertanto, che Maria e Giorgio dicono la verità, cioè che nel sacchetto ci sono solo biglie nere (Giorgio) e che sono tre (Maria).