Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Frazioni algebriche + Criteri di congruenza dei triangoli

28.02.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: **1 C**

A. Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

1. $36x^7y^2 + 27x^9 + 12x^5y^4$
2. $3z^4 - az^2 - 4a^2$
3. $a^6 - a^2 + 4a - 4$
4. $\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{27}{16}x^5$
5. $27a^2 - 27b^2 - a^2y^3 + b^2y^3$
6. $(a+2b)^2 - 4a^2 - b^2 + 4ab$
7. $a^5 - a^2b^6 - a^3b^2 + b^8$
8. $x^4 + 64$
9. $6x^4 + 13x^3 - 3x^2 - 12x - 4$
10. $9x^5 - 6x^4 + 27x^3 - 18x^2$

B. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$\dfrac{9x^2 - 6x + 1}{3x^2 - x}$	$\boxdot\ \dfrac{3x-1}{x}$	$\boxdot\ \dfrac{3x-2}{x}$	$\boxdot\ 3x - 6$	$\boxdot\ -2$
$\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 2y - xy}$	$\boxdot\ \dfrac{x-3}{x-2y}$	$\boxdot\ \dfrac{x-3}{x-y}$	$\boxdot\ \dfrac{x-3}{2x-y}$	$\boxdot\ \dfrac{x+3}{x-y}$
$\dfrac{a^2 - 2ab + b^2 - (2a-b)^2}{9a^2 - 12ab + 4b^2}$	$\boxdot\ \dfrac{a}{2b+3a}$	$\boxdot\ \dfrac{a}{b-3a}$	$\boxdot\ \dfrac{a}{2b-a}$	$\boxdot\ \dfrac{a}{2b-3a}$
$\dfrac{a^{2n+1} + 2a^{2n} - a - 2}{a^{n+2} + 4a^{n+1} + 4a^n - a^2 - 4a - 4}$	$\boxdot\ \dfrac{a^n+2}{a+1}$	$\boxdot\ \dfrac{a^{2n}+1}{a+2}$	$\boxdot\ \dfrac{a^n+1}{a+2}$	$\boxdot\ \dfrac{a^n-1}{a-2}$

C. Semplifica le seguenti espressioni contenenti frazioni algebriche:

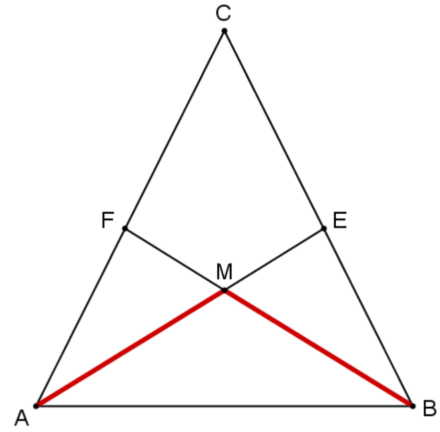
$$\left[\frac{m^3 - n^3}{(m+n)^4} : (m-n)\right] \cdot (m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3)$$

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^4y^4}{x^4 - y^4}\right)^{-1}$$

$$\left[\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3-x}\right) : \frac{5-2x}{x^2+3-4x} + \left(\frac{x-2}{1-x}\right)^{-2}\right] : \left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 - \frac{x-1}{4+x^2-4x}\right]$$

D. Nel triangolo isoscele ABC, le bisettrici AE e BF si incontrano nel punto M.
Dimostra che:

a. $AM \cong BM$
b. i triangoli $AFM \cong BEM$



Valutazione	Esercizio	A	B	C	D	Totale
	Punti	25	16	24	15	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

A. Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

1. $36x^7y^2 + 27x^9 + 12x^5y^4 \;=\; 3x^5(12x^2y^2 + 9x^4 + 4y^4) \;=\; 3x^5(3x^2 + 2y^2)^2$.

2. $3z^4 - az^2 - 4a^2 =$

$p = 3 \cdot (-4) = -12$		$s = -1$
$+3$	-4	-1

$= 3z^4 + 3az^2 - 4az^2 - 4a^2 \;=$

$= 3z^2(z^2 + a) - 4a(z^2 + a) =$

$= (z^2 + a)(3z^2 - 4a)$

3. $a^6 - a^2 + 4a - 4 \;=\; a^6 - (a-2)^2 \;=\; [a^3 + (a-2)] \cdot [a^3 - (a-2)] \;=\; (a^3 + a - 2)(a^3 - a + 2) \;=$

	1	0	1	−2
+1		+1	+1	+2
	1	+1	+2	=

$= \;(a-1)(a^2 + a + 2)(a^3 - a + 2)$.

4. $\dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{9}{4}x^4 + \dfrac{27}{16}x^5 \;=\; \dfrac{12x^3 - 36x^4 + 27x^5}{16} \;=\; \dfrac{3x^3(4 - 12x + 9x^2)}{16} \;=\; \dfrac{3x^3}{16}(2 - 3x)^2$.

5. $27a^2 - 27b^2 - a^2y^3 + b^2y^3 \;=\; 27(a^2 - b^2) - y^3(a^2 - b^2) \;=\; (a^2 - b^2)(27 - y^3) \;=$
$= \;(a+b)(a-b)(3-y)(9 + 3y + y^2)$.

6. $(a+2b)^2 - 4a^2 - b^2 + 4ab \;=\; (a+2b)^2 - (4a^2 + b^2 - 4ab) \;=\; (a+2b)^2 - (2a-b)^2 \;=$
$= \;[(a+2b) + (2a-b)] \cdot [(a+2b) - (2a-b)] \;=\; [a + 2b + 2a - b] \cdot [a + 2b - 2a + b] \;=$
$= (3a+b)(3b-a)$.

7. $a^5 - a^2b^6 - a^3b^2 + b^8 \;=\; a^2(a^3 - b^6) - b^2(a^3 - b^6) \;=\; (a^3 - b^6)(a^2 - b^2) \;=$
$= \;(a - b^2)(a^2 + ab^2 + b^4)(a+b)(a-b)$.

8. $x^4 + 64 \;=\; x^4 + 64 \,+ 16x^2 - 16x^2 \;=\; (x^2 + 8) - 16x^2 \;=\; [(x^2+8) + 4x][(x^2+8) - 4x] \;=$
$= \;(x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x)$.

9. $6x^4 + 13x^3 - 3x^2 - 12x - 4 =$

$\mathrm{D}_4 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

	+6	+13	−3	−12	−4
+1		+6	+19	+16	+4
	+6	+19	+16	+4	=

$= (x-1)(6x^3 + 19x^2 + 16x + 4) =$

	+6	+19	+16	+4
−2		−12	−14	−4
	+6	+7	+2	0

$= (x-1)(x+2)(6x^2 + 7x + 2) \;=$

$= \;(x-1)(x+2)(6x^2 + 3x + 4x + 2) \;=$

$= \;(x-1)(x+2)[3x(2x+1) + 2(2x+1)] =$

$= \;(x-1)(x+2)(2x+1)(3x+2)$

10. $9x^5-6x^4+27x^3-18x^2 = 3x^2(3x^3-2x^2+9x-6) =$

$D_6=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$

$D_3=\{\pm1;\pm3\}$

$D_{\frac{6}{3}}=\left\{\pm1;\frac{1}{3};\pm2;\pm\frac{2}{3};\pm3;\pm6\right\}$

$$= 3x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2+9) =$$

$$= 3x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 3(x^2+3) =$$

$$= 3x^2(3x-2)(x^2+3)\,.$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +3 & -2 & +9 & -6 \\ \frac{2}{3} & & +2 & 0 & +6 \\ \hline & +3 & 0 & +9 & = \end{array}$$

B. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{9x^2-6x+1}{3x^2-x} = \qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq\frac{1}{3}$$

$$= \frac{(3x-1)^2}{x(3x-1)} = \frac{3x-1}{x}\,.$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-2y-xy} = \frac{(x+2)(x-3)}{x(x+2)-y(2+x)} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-y)} = \frac{x-3}{x-y} \qquad C.E.:\ x\neq-2\ \wedge\ x\neq y$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-(2a-b)^2}{9a^2-12ab+4b^2} = \frac{(a-b)^2-(2a-b)^2}{(3a-2b)^2} = \qquad C.E.:\ a\neq\frac{2}{3}b$$

$$= \frac{(a-b+2a-b)(a-b-2a+b)}{(3a-2b)^2} = \frac{-a\,(3a-2b)}{(3a-2b)^2} = \frac{-a}{3a-2b} = \frac{a}{2b-3a}$$

$$\frac{a^{2n+1}+2a^{2n}-a-2}{a^{n+2}+4a^{n+1}+4a^n-a^2-4a-4} = \qquad C.E.:\ \begin{cases} a\neq-2\ \wedge\ a\neq1 & se\ n\ è\ dispari \\ a\neq-2\ \wedge\ a\neq\pm1 & se\ n\ è\ pari\end{cases}$$

$$= \frac{a^{2n}(a+2)-(a+2)}{a^n(a^2+4a+4)-(a^2+4a+4)} = \frac{(a+2)(a^{2n}-1)}{(a^2+4a+4)(a^n-1)} = \frac{(a+2)(a^n+1)(a^n-1)}{(a+2)^2(a^n-1)} = \frac{a^n+1}{a+2}\,.$$

C. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\left[\frac{\boldsymbol{m^3-n^3}}{\boldsymbol{(m+n)^4}} : \boldsymbol{(m-n)}\right]\cdot\boldsymbol{(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3)} = \qquad C.E.:\ m\neq\pm n$$

$$= \left[\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{(m+n)^4}\cdot\frac{1}{m-n}\right]\cdot(m+n)^3 = \frac{m^2+mn+n^2}{(m+n)^4}\cdot(m+n)^3 = \frac{\boldsymbol{m^2+mn+n^2}}{\boldsymbol{m+n}}\,.$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^4y^4}{x^4-y^4}\right)^{-1}} = \qquad C.E.:\ x\neq\pm y\ \wedge\ x\neq0\ \wedge\ y\neq0$$

$$= \left(\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\right)^{-1} = \left(\frac{x^2y^2}{y^2+x^2}\right)^2\cdot\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^4y^4} =$$

$$= \frac{x^4y^4}{(y^2+x^2)^2}\cdot\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^4y^4} = \frac{\boldsymbol{x^2-y^2}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}\,.$$

$$\left[\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}\right):\frac{5-2x}{x^2+3-4x}+\left(\frac{x-2}{1-x}\right)^{-2}\right]:\left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{4+x^2-4x}\right]=$$

$$C.E.:\ x\neq 2\ \wedge\ x\neq 3\ \wedge\ x\neq 1\ \wedge\ x\neq\frac{5}{2}$$

$$=\left[\frac{3-x-(x-2)}{(x-2)(3-x)}:\frac{5-2x}{(x-1)(x-3)}+\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2\right]:\left[\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{-2x+5}{(x-2)(3-x)}\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{5-2x}+\frac{(1-x)^2}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{(x-1)^2-(x-1)}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{5-2x}{(x-2)(3-x)}\cdot\frac{-(x-1)(3-x)}{5-2x}+\frac{(1-x)^2}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{x^2+1-2x-x+1}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[-\frac{x-1}{x-2}+\frac{x^2+1-2x}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\frac{-(x-2)(x-1)+x^2+1-2x}{(x-2)^2}:\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{-x^2+x+2x-2+x^2+1-2x}{(x-2)^2}:\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}=$$

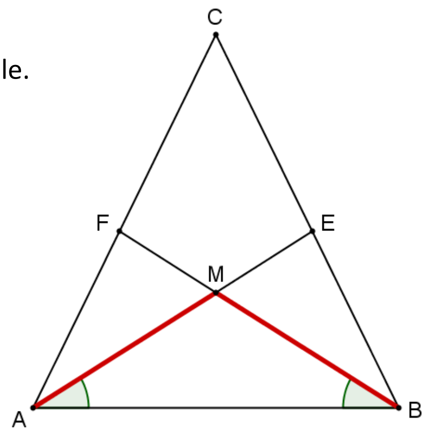
$$=\frac{x-1}{(x-2)^2}\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}.$$

D. Nel triangolo isoscele ABC con base AB, le bisettrici AE e BF si incontrano nel punto M. Dimostra che:

A. $AM\cong BM$
B. i triangoli $AFM\cong BEM$

IPOTESI		*TESI*
ABC è un triangolo isoscele sulla base AB AE bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ BF bisettrice dell'angolo $\hat{B}$	$\Rightarrow$	a. $AM\cong BM$ b. $AFM\cong BEM$

Dimostrazione 1



Per dimostrare che $AM\cong BM$ è sufficiente dimostrare che il triangolo ABM è isoscele.

Il triangolo ABM è isoscele perché ha gli angoli $B\hat{A}M\cong A\hat{B}M$.

Infatti:

$B\hat{A}M\cong\frac{1}{2}\hat{A}$ perché AE bisettrice dell'angolo $\hat{A}$

$A\hat{B}M\cong\frac{1}{2}\hat{B}$ perché AE bisettrice dell'angolo $\hat{B}$

$\hat{A}\cong\hat{B}$ per ipotesi

Quindi: $B\hat{A}M\cong\frac{1}{2}\hat{A}\cong\frac{1}{2}\hat{B}\cong A\hat{B}M$

Pertanto per la proprietà transitiva: $B\hat{A}M\cong A\hat{B}M$.

Dimostrazione 2

I triangoli AFM e BEM sono congruenti per il II criterio di congruenza dei triangoli.

Infatti:

$A\hat{M}F\cong B\hat{M}E$	perché angoli opposti al vertice
$AM\cong MB$	per la dimostrazione precedente
$F\hat{A}M\cong E\hat{B}M$	perchè differenza di angoli congruenti. Infatti: $F\hat{A}M\cong\hat{A}-B\hat{A}M\cong\hat{B}-A\hat{B}M\cong E\hat{B}M$.