Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Relazioni e Funzioni + Triangoli e criteri di parallelismo

22.03.2013

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: **1 B**

A	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

1. Compila la tabella a lato in modo da ottenere una relazione riflessiva e simmetrica.

2. Rappresenta nelle 4 modalità studiate la relazione R: "x *e* y *hanno lo stesso resto nella divisione per* 3" definita nell'insieme A= $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e specificane il tipo.

3. Dato l'insieme $A = \{3n + 2 \ / \ n \in N \quad \wedge \quad 2 \leq n \leq 6\}$:
   a. rappresenta l'insieme A per elencazione
   b. considera la relazione R: "$\frac{x}{y}$ è *una frazione ridotta ai minimi termini*" , con $x, y \in A$, e rappresentala mediante un grafo
   c. specifica di quali proprietà gode la relazione.

4. Antonella, Barbara, Carla, Donata, Erica e Federica si incontrano a un festa. Si sa che:
   a. Donata non stringe la mano a nessuno
   b. Barbara stringe la mano solo a Carla
   c. Antonella stringe la mano a tre ragazze
   d. Erica stringe la mano a due ragazze
   e. Carla stringe la mano a due ragazze

   Rappresenta mediante un grafo la relazione "x ha stretto la mano a y", nell'insieme delle 6 ragazze, e stabilisci se si tratta di una relazione d'ordine o di equivalenza. Stabilisci quindi a chi ha stretto la mano Antonella, a chi Carla e a chi Federica.

5. La seguente tabella è relativa a una funzione di proporzionalità diretta.
   - Dopo averla completala, scrivi l'espressione analitica della funzione
   - Rappresenta la funzione graficamente.

x	-2	-1	0		
y	$+4$			-2	-6

6. Traccia il grafico delle seguenti funzioni e individua dominio, codominio e il tipo di funzione (*iniettiva*, *suriettiva*, *biunivoca*):
   $x + y - 5 = 0$ $\quad y = \left|-\frac{4}{3}x + 2\right|$ $\quad y = \frac{8}{x}$ $\quad y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ $\quad y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 8\right|$

7. Traccia il grafico di una funzione biunivoca avente per dominio $D = [-2, \ 8]$ e per codominio $C = [-4, \ 1] \cup [3, \ 7]$

8. Due segmenti AB e CD si intersecano nel punto o in modo da formare i segmenti $AO \cong BO$ e $CO \cong DO$. Dimostra che il segmento AC è parallelo e congruente al segmento BD.

9. Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB. Considera un punto E sul lato AC e un punto F sul prolungamento di BC dalla parte di B in modo che sia $\mathrm{AE} \cong \mathrm{BF}$. Indica con T il punto di intersezione di EF con AB e sia R il punto in cui la parallela a BC passante per E interseca il lato AB. Dimostra che:
   a. Il triangolo AER è isoscele
   b. $ET \cong TF$

10. In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, traccia le mediane AN e BM e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che CP è la bisetttrice dell'angolo $\hat{C}$.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti	2	8	6	4	6	24	6	7	8	9	80

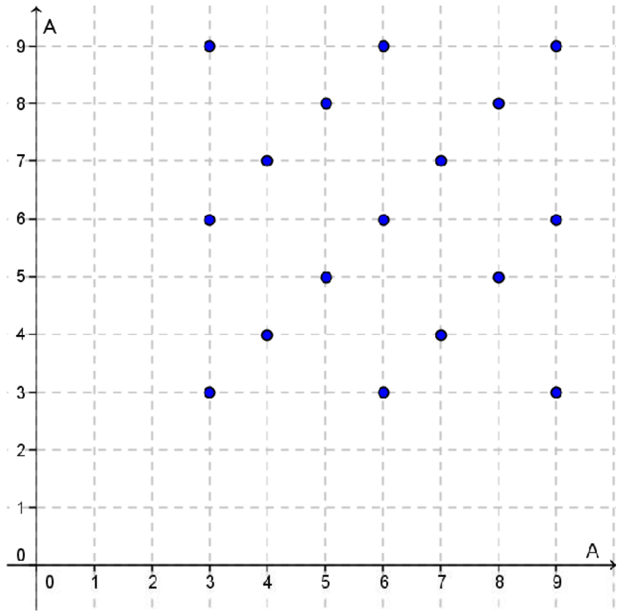
Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

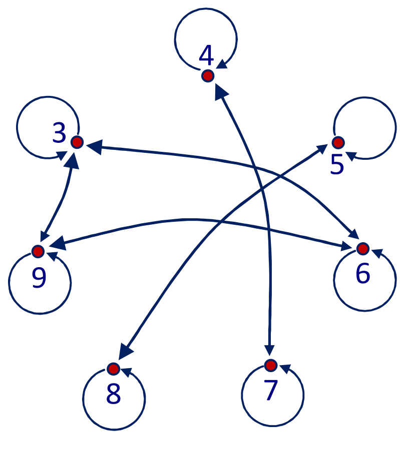
Soluzione

1. Compila la tabella a lato in modo da ottenere una relazione riflessiva e simmetrica.

A	1	2	3	4
1	X	X		X
2	X	X		
3			X	
4	X			X

2. Rappresenta nelle 4 modalità studiate la relazione R: "x e y $hanno$ lo $stesso$ $resto$ $nella$ $divisione$ per 3" definita nell'insieme A= $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e specificane il tipo.





A\A	3	4	5	6	7	8	9
3	X			X			X
4		X			X		
5			X			X	
6	X			X			X
7		X			X		
8			X			X	
9	X			X			X

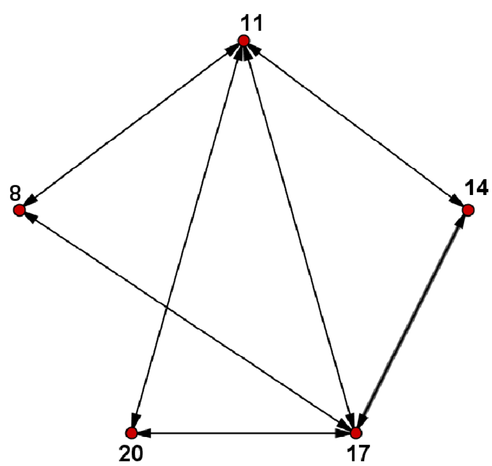
$$R = \left\{ \begin{array}{c} (3\,;3)\,,(3\,;\,6)\,,(3\,;9),(4\,;\,4)\,,(4\,;\,7)\,,(5\,;\,5)\,,(5\,;\,8)\,, \\ (6\,;\,3)\,,(6\,;\,6)\,,(6\,;\,9)\,,(7\,;\,4)\,,(7\,;\,7)\,,(8\,;\,5)\,,(8\,;\,8), \\ (9\,;\,3)\,,(9\,;\,6)\,,(9\,;\,9) \end{array} \right\}$$

La relazione R è:
Riflessiva – Simmetrica – Transitiva – Equivalenza

3. Dato l'insieme $A = \{3n + 2 \ / \ n \in N \quad \wedge \quad 2 \leq n \leq 6\}$:
   a. rappresenta l'insieme A per elencazione
   b. considera la relazione R: "$\frac{x}{y}$ è una $frazione$ $ridotta$ ai $minimi$ $termini$" , con $x, y \in A$, e rappresentala mediante un grafo
   c. specifica di quali proprietà gode la relazione.

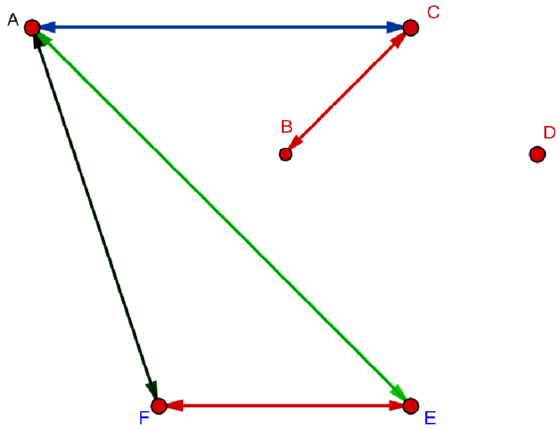
$A = \{8, 11, 14, 17, 20\}$

Antiriflessiva e Simmetrica



4. Antonella, Barbara, Carla, Donata, Erica e Federica si incontrano a una festa. Si sa che:
    a. Donata non stringe la mano a nessuno
    b. Barbara stringe la mano solo a Carla
    c. Antonella stringe la mano a tre ragazze
    d. Erica stringe la mano a due ragazze
    e. Carla stringe la mano a due ragazze

   Rappresenta mediante un grafo la relazione “x ha stretto la mano a y”, nell’insieme delle 6 ragazze che si sono incontrate alla festa, e stabilisci se si tratta di una relazione d’ordine o di equivalenza. Stabilisci quindi a chi ha stretto la mano Antonella, a chi Carla e a chi Federica.

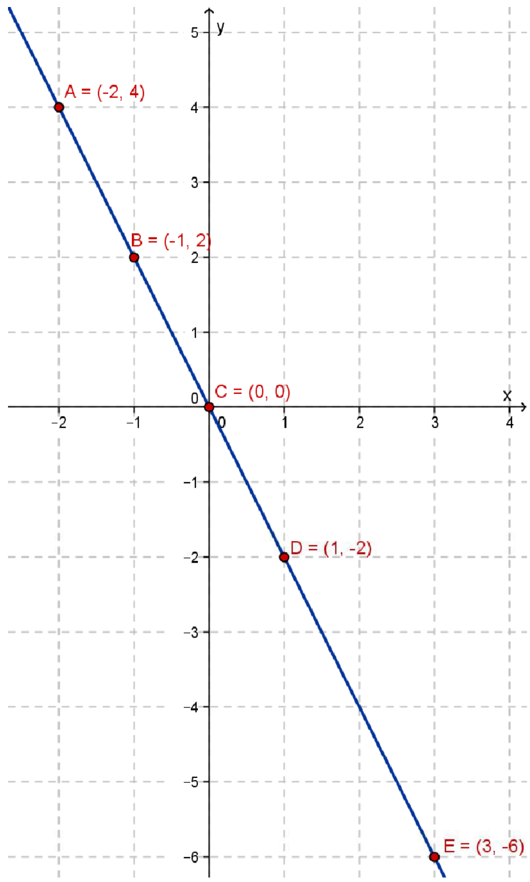


   Soluzione
   La relazione è antiriflessiva e simmetrica.
   Non è una relazione di equivalenza.
   Non è una relazione d’ordine.
   Antonella ha stretto la mano a Carla, Federica ed Erica.
   Carla ha stretto la mano ad Antonella e a Barbara.
   Federica ha stretto la mano ad Antonella e Erica.

5. La seguente tabella è relativa a una funzione di proporzionalità diretta.
   - Dopo averla completala, scrivi l’espressione analitica della funzione
   - Rappresenta la funzione graficamente.

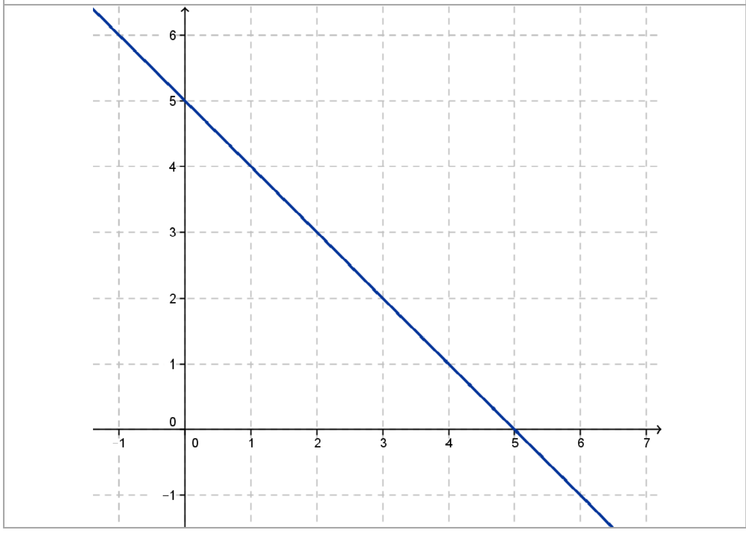
x	-2	-1	0	1	3
y	$+4$	2	0	-2	-6

$$y = -2x$$

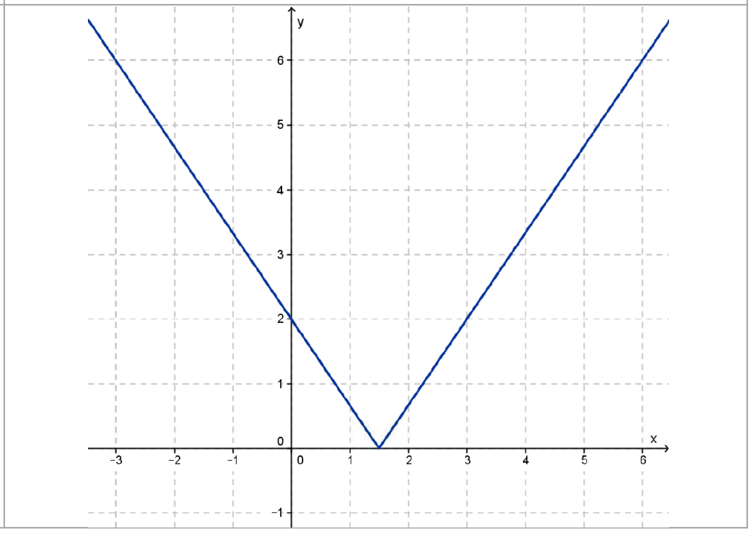


6. Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

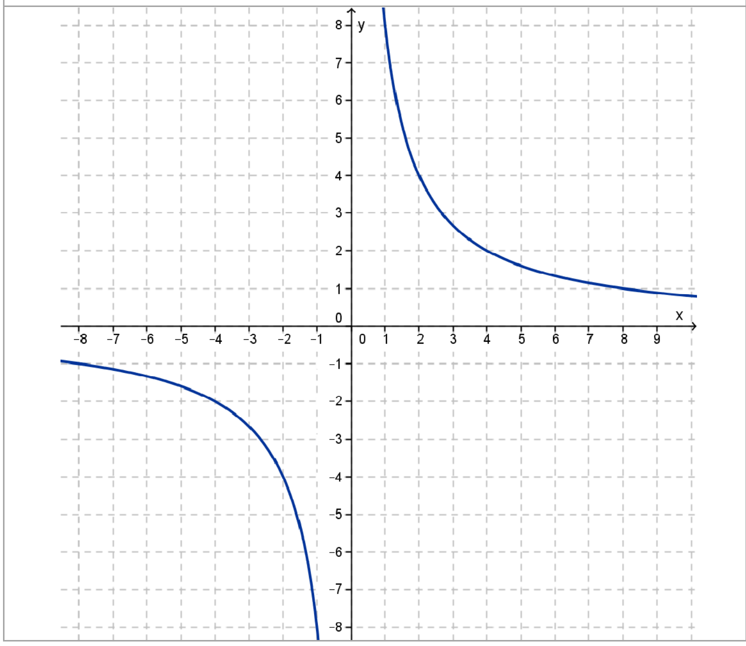
$x + y - 5 = 0 \qquad f: R \to R$ biunivoca



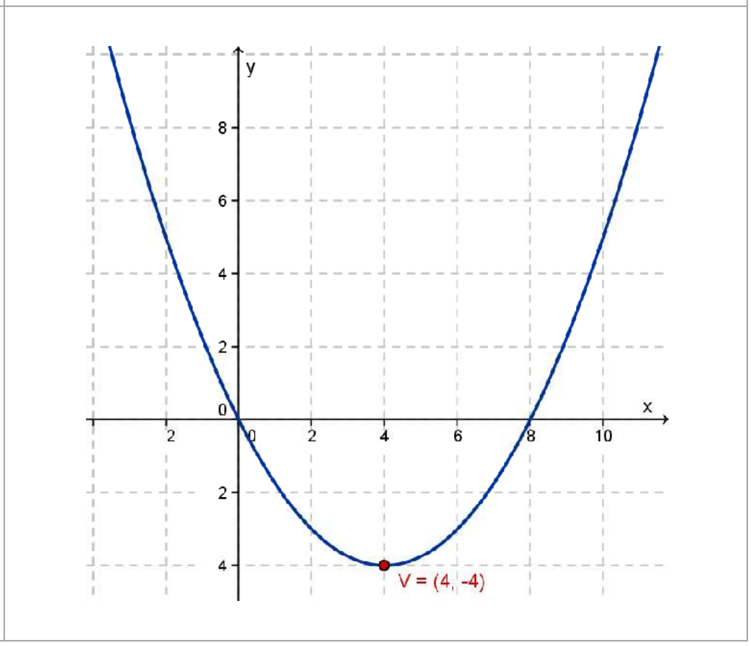
$y = \left| -\frac{4}{3}x + 2 \right| \qquad f: R \to [0, +\infty[$ non iniettiva, suriettiva



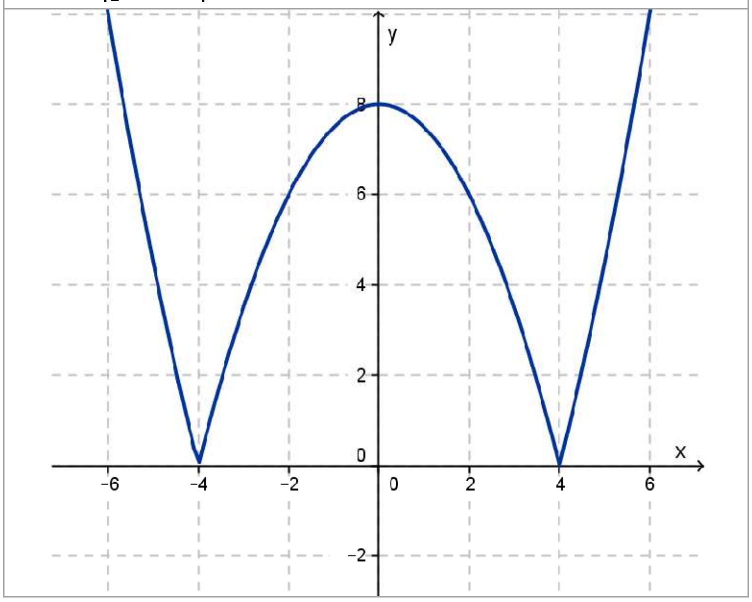
$y = \frac{8}{x} \qquad f: R - \{0\} \to R - \{0\}$ *biunivoca*



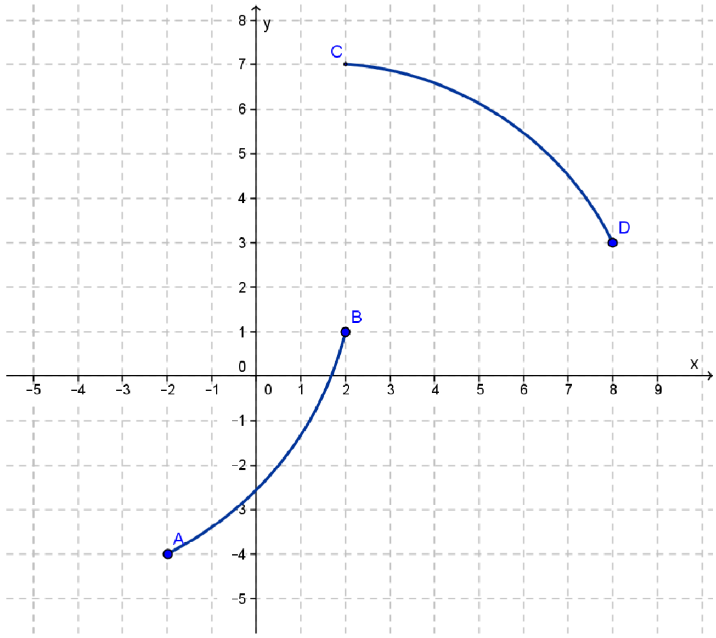
$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x \qquad f: R \to [-4, +\infty[$ *non iniettiva, suriettiva*



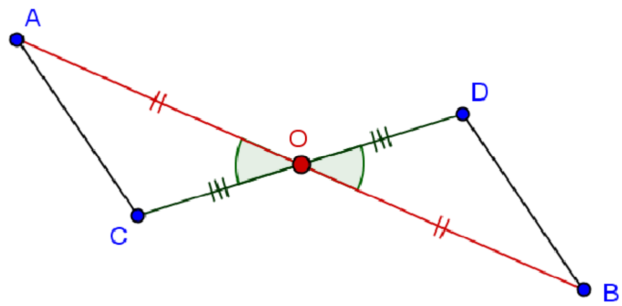
$y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 8 \right| \qquad f: R \to [0, +\infty[$ *non iniettiva, suriettiva*



7. Traccia il grafico di una funzione biunivoca avente per dominio
   $D = [-2,\ 8]$
   e per codominio $C = [-4,\ 1] \cup [3,\ 7]$



8. Due segmenti AB e CD si intersecano nel punto O in modo da formare i segmenti $AO \cong BO$ e $CO \cong DO$. Dimostra che il segmento AC è parallelo e congruente al segmento BD.



IPOTESI		TESI
$AO \cong BO$ $CO \cong DO$	$\Rightarrow$	$AC \parallel BD$ $AC \cong BD$

Dimostrazione

Per dimostrare che $AC \cong BD$ è sufficiente dimostrare che i triangoli ACO e BDO sono congruenti.

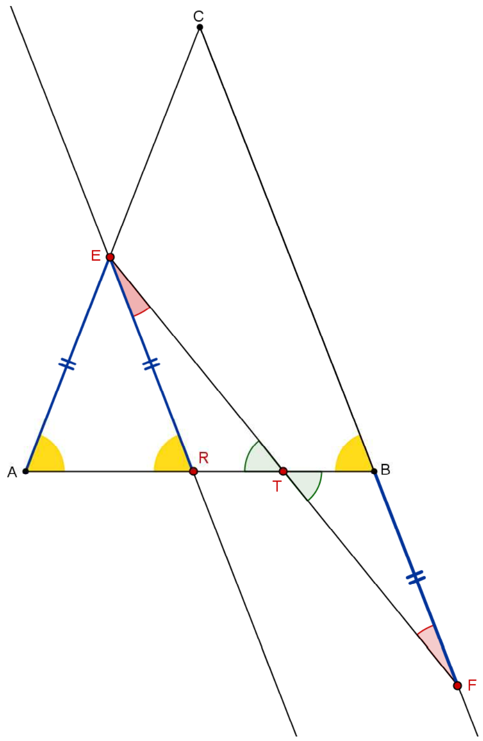
$ACO \cong BDO$ per il I C.C.T. Infatti:

$AO \cong BO$ per ipotesi
$CO \cong DO$ per ipotesi
$A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$ perché angoli opposti al vertice.

Avendo dimostrato che $ACO \cong BDO$ si ha la tesi, cioè: $AC \cong BD$.

Per dimostrare che $AC \parallel BD$ è sufficiente dimostrare che esse formano con una generica retta trasversale angoli alterni interni congruenti. Pertanto, è sufficiente dimostrare che $C\hat{A}O \cong D\hat{B}O$.
Avendo dimostrato che i triangoli $ACO \cong BDO$ si ha che $C\hat{A}O \cong D\hat{B}O$. Ciò è sufficiente per la tesi $AC \parallel BD$.

9. Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB. Considera un punto E sul lato AC e un punto F sul prolungamento di BC dalla parte di B in modo che sia $AE \cong BF$. Indica con T il punto di intersezione di EF con AB e sia R il punto in cui la parallela a BC passante per E interseca il lato AB. Dimostra che:
    a. Il triangolo AER è isoscele
    b. $ET \cong TF$



IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo isoscele sulla base AB $AE \cong BF$ $ER \parallel BC$	$\Rightarrow$	AER è un triangolo isoscele $ET \cong TF$

Dimostrazione

Per dimostrare che AER è un triangolo isoscele è sufficiente dimostrare che gli angoli alla base $E\hat{A}R$ e $A\hat{R}E$ sono congruenti.

$A\hat{R}E \cong A\hat{B}C$ perché angoli corrispondenti fra le rette parallele ER e BC tagliate dalla trasversale AB.

$A\hat{B}C \cong B\hat{A}C$ perché angoli alla base del triangolo isoscele ABC sulla base AB.

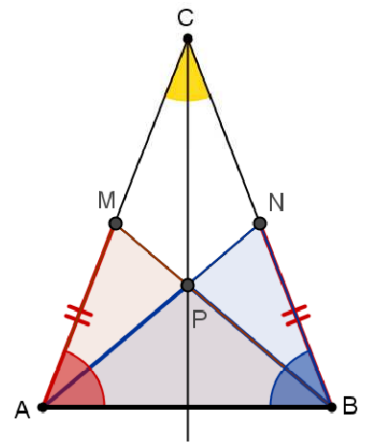
Per la proprietà transitiva si ha: $A\hat{R}E \cong B\hat{A}C$.

Per dimostrare che $ET \cong TF$ è sufficiente dimostrare che i triangoli ERT e BFT sono congruenti.

$ERT \cong BFT$ per il II C.C.T. Infatti:

$ER \cong BF$ per la proprietà transitiva ($ER \cong AE \cong BF$)
$R\hat{E}T \cong B\hat{F}T$ perché angoli alterni interni fra le rette parallele ER e BC tagliate dalla trasversale EF.
$E\hat{R}T \cong F\hat{B}T$ perché angoli alterni interni fra le rette parallele ER e BC tagliate dalla trasversale AB.

10. In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, traccia le mediane AN e BM e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che CP è la bisetttrice dell'angolo $\hat{C}$.



IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo isoscele sulla base AB $AM \cong CM$ $BN \cong CN$	$\Rightarrow$	$A\hat{C}P \cong B\hat{C}P$

Dimostrazione

I triangoli $ABN \cong ABM$ per il I C.C.T. Infatti:

AB è in comune
$AM \cong BN$ perché $AM \cong \frac{1}{2}AC \cong \frac{1}{2}BC \cong BN$
$\hat{A} \cong \hat{B}$ perché angoli alla base del triangolo isoscele.

Avendo dimostrato che $ABM \cong ABN$ si ha che $B\hat{A}N \cong A\hat{B}M$.
Ciò vuol dire che il triangolo ABP è isoscele sulla base AB e che $AP \cong BP$.

Per dimostrare che gli angoli $A\hat{C}P \cong B\hat{C}P$ è sufficiente dimostrare che i triangoli ACP e BCP sono congruenti.

$ACP \cong BCP$ per il III C.C.T. Infatti:

$AC \cong BC$ per ipotesi
$AP \cong BP$ per la dimostrazione precedente
CP lato in comune.