

1. Completa la seguente tabella:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$2x + 2 = 4 + 2(x - 1)$	R				
$2x = 2x + 1$	R				
$3x - 5 = 0$	Z				
$x + y = 100$	R				
$2x + 6 = 0$	N				
$ x  - 5 = x - 5$	R				

2. Verifica se l'espressione a lato è un'identità:  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

3. Data la formula:  $a = \frac{1}{2}b^2c - k$  ricava la formula per determinare  $b$ .

4. Risolvi le seguenti equazioni :

$$2x^2 - 3 = x(2x - 3) + x + 5$$

[effettua la verifica]

$$(z - 3)(z + 3) - [-(2 - z) + 5] = 2 + z(z + 1)$$

[effettua la verifica]

$$\left[ \left( 2 - \frac{1}{2}x \right) \left( -2 - \frac{1}{2}x \right) + (x - 2)^2 \right] \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) - \frac{1}{5}x = 1 - x(x - 5)$$

$$\left[ \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2}}{\frac{x}{x-1}} + \frac{\frac{x^2}{1-x^2} - \frac{2x}{x-1}}{\frac{x^2}{1-x}} \right] \cdot (x + 1) = \frac{1}{x}$$

5. Risolvi le seguenti equazioni letterali :

$$a^3x - a^2 - 9ax + 9 = 0$$

$$\frac{bx + 1}{b - 1} + \frac{1 - bx}{b + 2} = \frac{2b + 7}{b^2 + b - 2}$$

$$\frac{x}{ax^2 - 2ax + a} - \frac{2a}{ax - a} = 0;$$

6. Una compagnia telefonica fa pagare un canone mensile di 10 €, e 8 centesimi per ogni minuto di conversazione. Un'altra compagnia fa pagare un canone mensile di 15 €, e 6 centesimi per ogni minuto di conversazione. Quanti minuti si dovrebbe conversare in un mese, per pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia ?

7. In un trapezio la base minore è il doppio dell'altezza e l'altezza è la terza parte della base maggiore. Sapendo che il doppio della differenza delle basi è uguale all'altezza aumentata di 12 m, calcola la sua area.

8. Alle ore 10:20, un treno parte da Milano in direzione di Roma, mentre un secondo treno parte da Roma in direzione di Milano. Alle 12:50 i due treni si incontrano a Firenze. Sapendo che il percorso Milano-Roma è di 507,5 km, che il primo treno viaggia ad una velocità media di 20 km/h superiore a quella del secondo e che prima di incontrarsi si fermano alle stazioni intermedie rispettivamente 30 minuti il primo treno e 15 minuti il secondo, determina le velocità dei due treni.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
	Punti	3	4	4	4-5-6-7	7-8-8	8	8	8	8

Punti	0 - 3	4 - 8	9 - 13	14 - 19	20 - 25	26 - 31	32 - 37	38 - 43	44 - 49	50 - 55	56 - 61	62 - 67	68 - 72	73 - 76	77 - 80
Voto	2	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½	8	8½	9	10

# Soluzione

1. Completa la seguente tabella:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$2x + 2 = 4 + 2(x - 1)$	R	X		X	
$2x = 2x + 1$	R				X
$3x - 5 = 0$	Z				X
$x + y = 100$	R			X	
$2x + 6 = 0$	N				X
$ x  - 5 = x - 5$	R			X	

2. Verifica se l'espressione a lato è una identità:  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

$$x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 + 2xy = 4xy; \quad +2xy + 2xy = 4xy; \quad 4xy = 4xy. \quad \text{È un'identità.}$$

3. Data la formula:  $a = \frac{1}{2}b^2c - k$  ricava la formula per determinare b.

$$a = \frac{1}{2}b^2c - k; \quad 2a = b^2c - 2k; \quad -b^2c = -2k - 2a; \quad b^2c = 2k + 2a; \quad b^2 = \frac{2k + 2a}{c}; \quad b = \pm \sqrt{\frac{2k + 2a}{c}}$$

4. Risolvi le seguenti equazioni :

$$2x^2 - 3 = x(2x - 3) + x + 5; \quad 2x^2 - 3 = 2x^2 - 3x + x + 5; \quad -3 = -3x + x + 5; \quad 2x = 8; \quad x = 4.$$

Verifica

$$2 \cdot 4^2 - 3 = 4 \cdot (2 \cdot 4 - 3) + 4 + 5; \quad 32 - 3 = 4 \cdot 5 + 4 + 5; \quad 29 = 29.$$

$$(z - 3)(z + 3) - [-(2 - z) + 5] = 2 + z(z + 1);$$

$$z^2 - 9 - [-2 + z + 5] = 2 + z^2 + z;$$

$$z^2 - 9 + 2 - z - 5 = 2 + z^2 + z;$$

$$-9 - z - 5 = z;$$

$$-2z = 14;$$

$$2z = -14;$$

$$z = -7$$

Verifica

$$(-7 - 3)(-7 + 3) - [-(2 + 7) + 5] = 2 - 7(-7 + 1);$$

$$(-10)(-4) - [-9 + 5] = 2 - 7(-6);$$

$$40 - [-4] = 2 + 42;$$

$$44 = 44.$$

$$\left[ \left( 2 - \frac{1}{2}x \right) \left( -2 - \frac{1}{2}x \right) + (x - 2)^2 \right] \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) - \frac{1}{5}x = 1 - x(x - 5);$$

$$\left[ \frac{1}{4}x^2 - 4 + x^2 + 4 - 4x \right] \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) - \frac{1}{5}x = 1 - x^2 + 5x;$$

$$\left[ \frac{5}{4}x^2 - 4x \right] \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) - \frac{1}{5}x = 1 - x^2 + 5x;$$

$$+\frac{16}{5}x - \frac{1}{5}x = 1 + 5x;$$

$$+16x - x = 5 + 25x;$$

$$-10x = 5;$$

$$10x = -5;$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

$$\left[ \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{2x}{x-1} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$C.E.: x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq +1$$

$$\left[ \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1+x)(1-x)} + \frac{x^2}{(1+x)(1-x)} - \frac{2x}{-(1-x)} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\left[ \frac{1+x+2x}{(1+x)(1-x)} + \frac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)(1-x)} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\left[ \frac{1+3x}{(1+x)(1-x)} \cdot \frac{1-x}{-x} + \frac{x^2+2x+2x^2}{(1+x)(1-x)} \cdot \frac{1-x}{x^2} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\left[ \frac{1+3x}{-x \cdot (1+x)} + \frac{3x^2+2x}{x^2 \cdot (1+x)} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\left[ -\frac{1+3x}{x \cdot (1+x)} + \frac{x \cdot (3x+2)}{x^2 \cdot (1+x)} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\left[ -\frac{1+3x}{x \cdot (1+x)} + \frac{3x+2}{x \cdot (1+x)} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\left[ \frac{-1-3x+3x+2}{x \cdot (1+x)} \right] \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{x \cdot (1+x)} \cdot (x+1) = \frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x};$$

$1 = 1$ ; *Equazione indeterminata*

$$\forall x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq +1$$

5. Risolvi le seguenti equazioni letterali :

$$a^3x - a^2 - 9ax + 9 = 0; \quad a^3x - 9ax = a^2 - 9; \quad (a^3 - 9a)x = a^2 - 9;$$

Se  $a^3 - 9a = 0$ ; cioè se  $a(a+3)(a-3) = 0$ ;

Se $a = 0$	$0x = -9$	<i>eq. impossibile</i>
Se $a = -3$	$0x = 0$	<i>eq. indeterminata</i>
Se $a = 3$	$0x = 0$	<i>eq. indeterminata</i>

Se  $a \neq 0 \wedge a \neq \mp 3 \Rightarrow x = \frac{a^2 - 9}{a^3 - 9a} = \frac{(a+3)(a-3)}{a(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a}$

Riassumendo:

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a = 0$	Equazione impossibile	$\nexists x \in R$
$a = -3 \vee a = +3$	Equazione indeterminata	$\forall x \in R$
$a \neq 0 \wedge a \neq \mp 3$	Equazione determinata	$x = \frac{1}{a}$

$$\frac{bx+1}{b-1} + \frac{1-bx}{b+2} = \frac{2b+7}{b^2+b-2}; \quad \frac{bx+1}{b-1} + \frac{1-bx}{b+2} = \frac{2b+7}{(b-1)(b+2)}; \quad C.E.(p): b \neq 1 \wedge b \neq -2$$

$$(bx+1)(b+2) + (1-bx)(b-1) = 2b+7; \quad b^2x + 2bx + b + 2 + b - 1 - b^2x + bx = 2b+7;$$

$$3bx = 6;$$

$$\text{Se } 3b = 0 = 0; \quad \text{cioè se } b = 0 \quad \Rightarrow \quad 0x = 6 \quad \text{eq. impossibile}$$

$$\text{Se } b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3b} = \frac{2}{b}$$

Riassumendo:

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$b = 1 \vee b = -2$	Equazione priva di significato	-
$b = 0$	Equazione impossibile	$\nexists x \in R$
$b \neq 0 \wedge b \neq 1 \wedge b \neq -2$	Equazione determinata	$x = \frac{2}{b}$

$$\frac{x}{ax^2 - 2ax + a} - \frac{2a}{ax - a} = 0; \quad \frac{x}{a(x-1)^2} - \frac{2a}{a(x-1)} = 0; \quad C.E.(parametro): a \neq 0$$

$$C.E.(incognita): x \neq 1$$

$$x - 2a(x-1) = 0; \quad x - 2ax + 2a = 0; \quad (1-2a)x = -2a;$$

$$\text{Se } 1-2a = 0; \quad \text{cioè se } a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0x = -1 \quad \text{eq. impossibile}$$

$$\text{Se } a \neq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2a}{1-2a} = \frac{2a}{2a-1} \quad \text{Tale soluzione è accettabile se soddisfa il C.E.(i): } x \neq 1.$$

$$\text{Risolvendo } \frac{2a}{2a-1} \neq 1 \quad \text{si ha: } 2a \neq 2a-1; \quad 0 \neq -1; \quad \forall a \in R.$$

Riassumendo:

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a = 0$	Equazione priva di significato	-
$a = \frac{1}{2}$	Equazione impossibile	$\nexists x \in R$
$a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2}$	Equazione determinata	$x = \frac{2a}{2a-1}$

6. Una compagnia telefonica fa pagare un canone mensile di 10 €, e 8 centesimi per ogni minuto di conversazione. Un'altra compagnia fa pagare un canone mensile di 15 €, e 6 centesimi per ogni minuto di conversazione. Quanti minuti si dovrebbe conversare in un mese, per pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia ?

Soluzione

Indichiamo con  $x$  il numero dei minuti di conversazione in un mese, con la limitazione  $x > 0$ .

La prima compagnia fa pagare una somma data dalla seguente espressione:  $8x + 1000$

La seconda compagnia fa pagare una somma data dalla seguente espressione:  $6x + 1500$

Affinché si paghi la stessa somma deve essere:  $8x + 1000 = 6x + 1500$ . Da cui:

$$8x - 6x = 1500 - 1000; \quad 2x = 500; \quad x = 250$$

Pertanto per pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia, in un mese si dovrebbe conversare 250 minuti.

[ 10 € = 1000 centesimi - 15 € = 1500 centesimi ]

7. In un trapezio la base minore è il doppio dell'altezza e l'altezza è la terza parte della base maggiore. Sapendo che il doppio della differenza delle basi è uguale all'altezza aumentata di 12 m, calcola la sua area.

Soluzione

Indichiamo la base maggiore  $b_1 = x \Rightarrow h = \frac{1}{3}x$  e  $b_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$  con la limitazione  $x > 0$ .

Pertanto si ha:

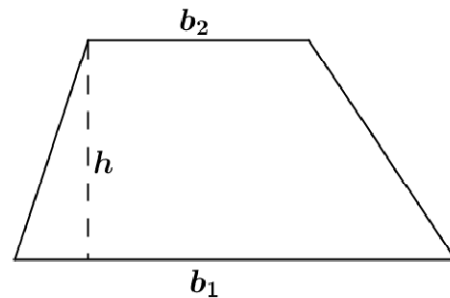
$$2 \cdot (b_1 - b_2) = h + 12; \quad 2 \cdot \left(x - \frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{3}x + 12;$$

$$2x - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}x + 12; \quad 6x - 4x = x + 36; \quad x = 36;$$

Quindi:

$$b_1 = 36 \text{ m} \quad b_2 = \frac{2}{3} \cdot 36 \text{ m} = 24 \text{ m} \quad h = \frac{1}{3} \cdot 36 \text{ m} = 12 \text{ m}$$

$$\text{L'area è: } S = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = \frac{36 + 24}{2} \cdot 12 \text{ m}^2 = 360 \text{ m}^2$$



8. Alle ore 10:20, un treno parte da Milano in direzione di Roma, mentre un secondo treno parte da Roma in direzione di Milano. Alle 12:50 i due treni si incontrano a Firenze. Sapendo che il percorso Milano-Roma è di 507,5 km, che il primo treno viaggia ad una velocità media di 20 km/h superiore a quella del secondo e che prima di incontrarsi si fermano alle stazioni intermedie rispettivamente 30 minuti il primo treno e 15 minuti il secondo, determina le velocità dei due treni.

Soluzione

Indichiamo la velocità del secondo treno:  $v_2 = x \Rightarrow v_1 = x + 20$  con la limitazione  $x > 0$ .

Essendosi fermato 30 minuti, al momento dell'incrocio, il primo treno ha viaggiato per 2 ore effettive.

Il secondo treno invece, essendosi fermato 15 minuti, al momento dell'incrocio, ha viaggiato per 2 ore e 15 minuti effettivi, che trasformato in forma decimale diventa:  $2^h 15' = 2^h \left(\frac{15}{60}\right)^h = 2^h (0,25)^h = 2,25^h$ .

Nell'istante in cui i due treni si incontrano, hanno percorso complessivamente l'intero tragitto di 507,5 km.

$$\text{Cioè: } s_1 + s_2 = 507,5; \quad v_1 t_1 + v_2 t_2 = 507,5; \quad (x + 20) \cdot 2 + x \cdot 2,25 = 507,5;$$

$$2x + 40 + 2,25x = 507,5; \quad 4,25x = 467,5; \quad x = \frac{467,5}{4,25} = 110.$$

Pertanto la velocità media del secondo treno è  $v_2 = 110 \text{ km/h}$ ,

mentre la velocità media del primo treno è  $v_1 = 130 \text{ km/h}$ .