

MATEMATICA: Sistemi di equazioni e problemi di I grado

Alunno: _____ Classe: 5 B

03 dicembre 2011
prof. Mimmo Corrado


1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$$\begin{cases} x - 3y + (y + 1)^2 = y^2 \\ 3(x - y) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{y+1}{2} \\ \frac{1-y}{3} - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

2. Determina per quale valore del parametro k il seguente sistema è indeterminato.

$$\begin{cases} (k + 2)x + 3y = -k \\ 14x + 6y = -10 \end{cases}$$

3. In un trapezio isoscele, il doppio della base minore supera la base maggiore di 1cm, mentre il lato obliquo è $\frac{4}{3}$ della base minore. Sapendo che il perimetro è 16cm. Determina le lunghezze dei lati.

4. Un secchio pieno di sabbia pesa 9kg. Riempito per meta di sabbia pesa 5Kg. (Olimpiadi della matematica 2000) 
Determina il peso del secchio vuoto, motivando la risposta.

0,5 kg 1 kg 2kg 2,5kg 1,5kg

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	Totale
	Punti	5 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7	10	20	10	80

Punti	0 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35	36 - 40	41 - 45	46 - 50	51 - 55	56 - 60	61 - 65	66 - 70	71 - 75	76 - 80
Voto	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½	8	8½	9	10

Soluzione

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$$\begin{cases} x - 3y + (y + 1)^2 = y^2 \\ 3(x - y) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y + y^2 + 1 + 2y = y^2 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{b}{b'} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}\right) \neq \left(\frac{c}{c'} = \frac{-1}{2}\right) \quad \text{Sistema impossibile}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{y + 1}{2} \\ \frac{1 - y}{3} - 2x - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = y + 1 \\ 1 - y - 6x - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x + y = -8 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{-1}{+1} = -1\right) \quad \text{Sistema determinato}$$

Metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 2x = -8 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = -8 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \cdot (-1) = -2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Metodo del confronto:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -6x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -6x - 8 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = -8 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \cdot (-1) = -2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{array}{l} 6 \cdot \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x + y = -8 \end{cases} \\ 2 \cdot \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x + y = -8 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} 12x - 6y = 0 \\ 12x + 2y = -16 \end{cases} \quad - \\ \hline -8y = 16; \quad y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x + y = -8 \end{cases} \quad + \\ \hline 8x = -8; \quad x = -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x + y = -8 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & +1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) = 2 + 6 = 8$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & +1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-8) \cdot (-1) = -8$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 6 \cdot 0 = -16$$

$$\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} = \frac{-8}{8} = -1 \\ y = \frac{Dy}{D} = \frac{-16}{8} = -2 \end{cases}$$

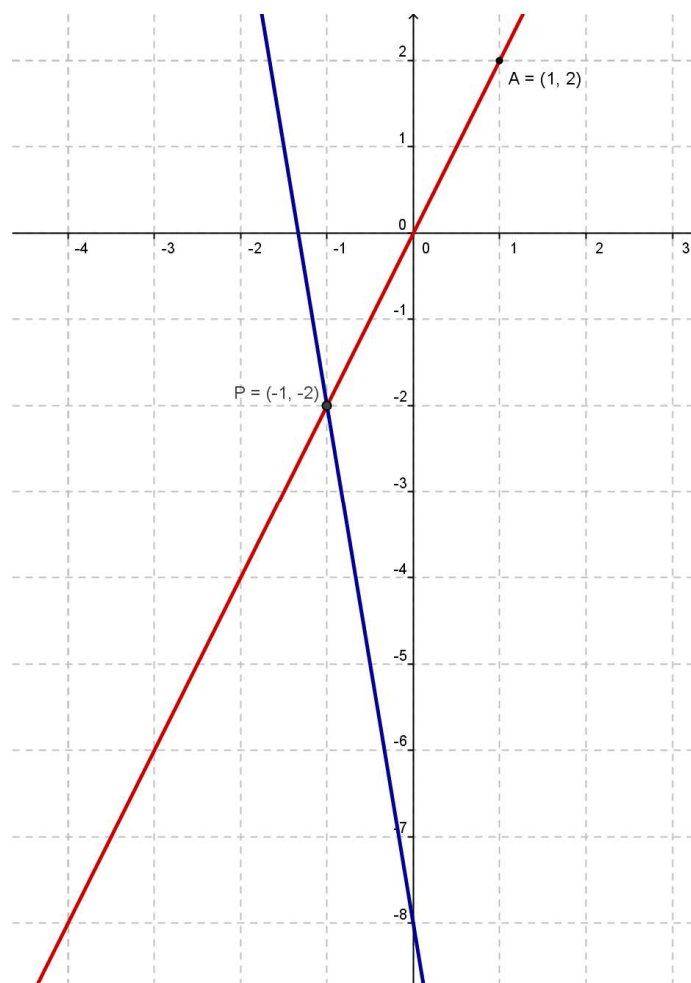
Metodo grafico

$$2x - y = 0$$

x	y
0	0
1	2

$$6x + y = -8$$

x	y
0	-8
$-\frac{4}{3}$	0



2. Determina per quale valore del parametro k il seguente sistema è indeterminato.

$$\begin{cases} (k+2)x + 3y = -k \\ 14x + 6y = -10 \end{cases}$$

Soluzione

$$\frac{a}{a^I} = \frac{k+2}{14}$$

$$\frac{b}{b^I} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{c^I} = \frac{-k}{-10} = \frac{k}{10}$$

Il sistema è indeterminato se:

$$\frac{a}{a^I} = \frac{b}{b^I} = \frac{c}{c^I}$$

Pertanto:

$$\begin{cases} \frac{a}{a^I} = \frac{b}{b^I} \\ \frac{b}{b^I} = \frac{c}{c^I} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{k+2}{14} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{k}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} k+2 = 7 \\ 5 = k \end{cases} \quad \begin{cases} k = 5 \\ k = 5 \end{cases}$$

Il seguente sistema è indeterminato per $k = 5$.

3. In un trapezio isoscele, il doppio della base minore supera la base maggiore di 1cm, mentre il lato obliquo è $\frac{4}{3}$ della base minore. Sapendo che il perimetro è 16cm. Determina le lunghezze dei lati.

Soluzione

Ponendo:

la misura della base maggiore $\overline{AB} = x$

la misura della base minore $\overline{CD} = y$

la misura del lato obliquo $\overline{BC} = z$

si ottiene:

$$\begin{cases} 2y = x + 1 \\ z = \frac{4}{3}y \\ x + y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = x + 1 \\ \dots \\ x + y + 2 \cdot \frac{4}{3}y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = x + 1 \\ \dots \\ x + y + 2 \cdot \frac{4}{3}y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = x + 1 \\ \dots \\ 3x + 3y + 8y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = x + 1 \\ \dots \\ 3x + 11y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ \dots \\ 3(2y - 1) + 11y = 48 \end{cases}$$

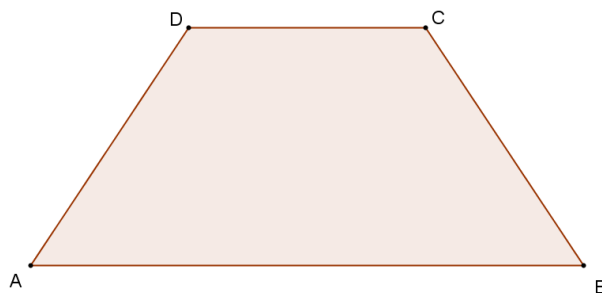
$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ 6y - 3 + 11y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ 17y = 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ z = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ z = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Pertanto: $\overline{AB} = 5cm$ $\overline{CD} = 3cm$ $\overline{BC} = 4cm$



4. Un secchio pieno di sabbia pesa 9 kg. Riempito per meta di sabbia pesa 5 Kg. Quanto pesa il secchio vuoto ?

(Olimpiadi della matematica 2000)



Soluzione

Ponendo:

il peso del secchio vuoto = x

il peso della sabbia contenuta nel secchio pieno = y

si ottiene:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 - y \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - y + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18 - 2y + y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 10 - 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 - 8 = 1 \end{cases}$$

Pertanto Il secchio vuoto pesa 1 kg.