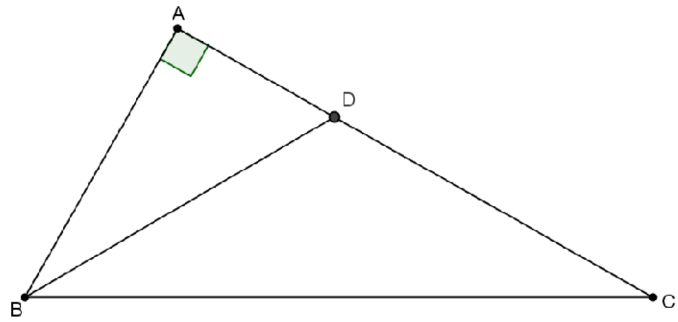
SIMILITUDINE

Problemi

Problema 228.179

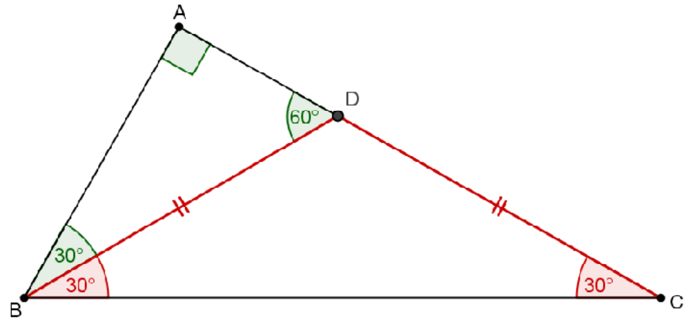
Un triangolo rettangolo ABC ha l'angolo $\hat{B} = 60°$. La bisettrice BD dell'angolo $\hat{B}$ msura $6\ cm$. Calcola il perimetro del triangolo ABC .



Soluzione

La bisettrice divide l'angolo $\hat{B} = 60°$ in due angoli di 30°, quindi il triangolo EBC è isoscele.

Pertanto $\overline{BD} = \overline{CD} = 6\ cm$.



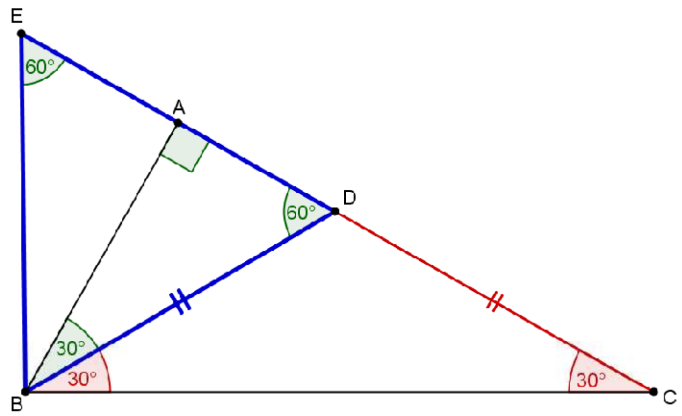
Il triangolo ADB è la metà di un triangolo equilatero.

Pertanto $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 3\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABD si ha:

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2}\ cm =$

$= \sqrt{36 - 9}\ cm = \sqrt{27}\ cm = 3\sqrt{3}\ cm$.



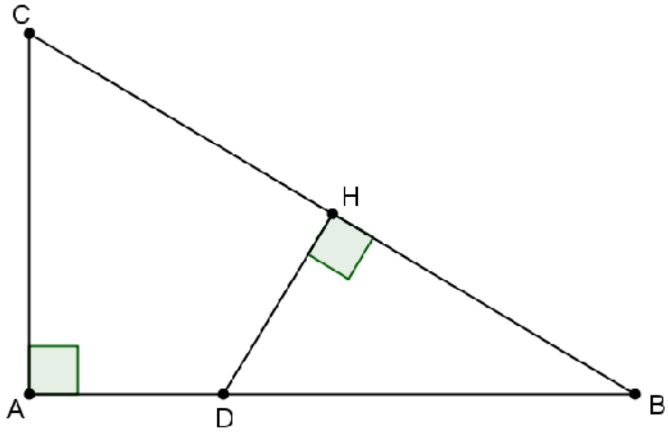
Pertanto $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = (3 + 6)\ cm = 9\ cm$.

Mentre $\overline{BC} = 2\ \overline{AB} = 6\sqrt{3}\ cm$.

La misura del perimetro del triangolo ABC è:

$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9\right)\ cm = \left(9\sqrt{3} + 9\right)\ cm = 9\left(\sqrt{3} + 1\right)\ cm$.

Nel triangolo rettangolo ABC raffigurato a lato, $\overline{AC} = 12\ cm$ $\overline{AB} = 16\ cm$, $\overline{BH} = \overline{HC}$, $D\widehat{H}B = 90°$.
Calcola l'area del triangolo PBH.



<u>*Soluzione*</u>

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2}\ cm =$

$= \sqrt{256 + 144}\ cm = \sqrt{400}\ cm = 20\ cm$

Pertanto $\overline{BH} = \overline{HC} = 10\ cm$.

I triangoli ABC e BDH sono simili. Infatti:

L'angolo $\widehat{B}$ è in comune
$\widehat{A} \cong D\widehat{H}B$ perché entrambi retti.

Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione:

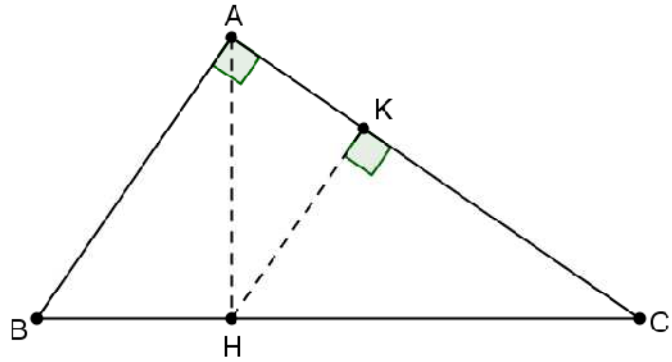
$\overline{BH} : \overline{AB} = \overline{DH} : \overline{AC}$;

$10 : 16 = \overline{DH} : 12$; $\qquad \overline{DH} = \dfrac{10 \cdot 12}{16}\ cm = \dfrac{15}{2}\ cm$

In definitiva l'area vale:

$$S_{CHK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{DH} = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2}\right) cm^2 = \frac{75}{2}\ cm^2$$

Nel triangolo rettangolo ABC raffigurato a lato, $\overline{AB} = 9\ cm$, $\overline{AC} = 12\ cm$ e $H\widehat{K}C = 90°$. Calcola il perimetro del triangolo AHK.



Soluzione 1

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{9^2 + 12^2}\ cm =$$
$$= \sqrt{81 + 144}\ cm = \sqrt{225}\ cm = 15\ cm$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12\ cm^2 = 54\ cm^2$$

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{AH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 54}{15}\ cm = \frac{36}{5}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo AHC si ha:

$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{144 - \frac{1296}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{2304}{25}}\ cm = \frac{48}{5}\ cm\ .$$

Inoltre i triangoli ABC e HCH sono simili. Infatti:
L'angolo $\hat{C}$ è in comune
$\hat{A} \cong H\widehat{K}C$ perché entrambi retti.

Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$$\overline{HK} : \overline{AB} = \overline{HC} : \overline{BC}\ ;$$

$$\overline{HK} : 9 = \frac{48}{5} : 15\ ; \qquad \overline{HK} = \frac{9 \cdot \frac{48}{5}}{15}\ cm = 9 \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{15}\ cm = \frac{144}{25}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo AHK si ha:

$$\overline{AK} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{5}\right)^2 - \left(\frac{144}{25}\right)^2}\ cm = \sqrt{\frac{1296}{25} - \frac{20736}{625}}\ cm = \sqrt{\frac{32400 - 20736}{625}}\ cm = \sqrt{\frac{11664}{625}}\ cm = \frac{108}{25}\ cm$$

La misura del perimetro del triangolo AHK è:

$$2p_{AHK} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{AK} = \left(\frac{36}{5} + \frac{144}{25} + \frac{108}{25}\right)\ cm = \frac{180 + 144 + 108}{25}\ cm = \frac{432}{25}\ cm\ .$$

Soluzione 2

Dopo aver determinato le misure dell'ipotenusa BC e dell'altezza relativa all'ipotenusa AH, si sfrutta la similitudine dei triangoli ABC e AHK:

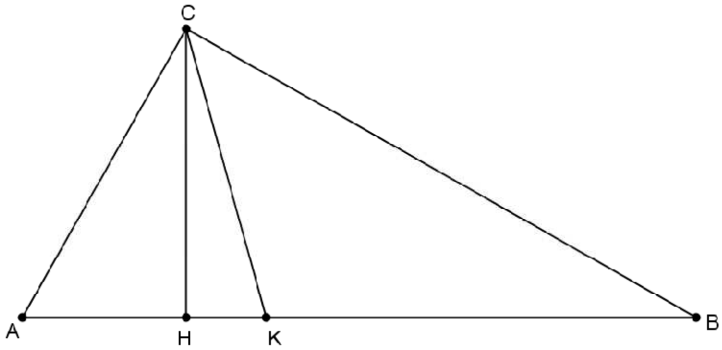
$$\overline{AH} : \overline{BC} = \overline{HK} : \overline{AC}\ ;$$

$$\frac{36}{5} : 15 = \overline{HK} : 12\ ; \qquad \overline{HK} = 12 \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{1}{15}\ cm = \frac{144}{25}\ cm$$

Si calcola in seguito, con il T. di Pitagora, la misura di $\overline{AK}$.

Problema 292.202

In un triangolo rettangolo ABC , di cateti 16 cm e 12 cm , traccia l'altezza CH relativa all'ipotenusa AB e la bisettrice CK dell'angolo retto. Calcola l'area del triangolo CHK.



<u>*Soluzione*</u>

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2}\ cm =$

$= \sqrt{400}\ cm = 20\ cm$

L'area del triangolo ABC vale:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16\right) cm^2 = 96\ cm^2$.

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$\overline{CH} = \dfrac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{AB}} = \dfrac{2 \cdot 96}{20} cm = \dfrac{48}{5} cm$.

Ricordando il T. della bisettrice:

"La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri due lati",

si ottiene:

$\overline{AK} : \overline{KB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ $\qquad$ $\overline{AK} : \overline{KB} = 12 : 16$;

Ponendo $\overline{AK} = x$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x : \overline{KB} = 12 : 16$; $\qquad$ $\overline{KB} = \frac{16x}{12} = \frac{4}{3}x$.

Considerando che: $\overline{AK} + \overline{KB} = 20$ si ha:

$x + \dfrac{4}{3}x = 20$; $\qquad$ $3x + 48x = 60$; $\qquad$ $7x = 60$; $\qquad$ $x = \dfrac{60}{7}$

Pertanto $\overline{AK} = \frac{60}{7}\ cm$ e $\overline{KB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{60}{7} = \frac{80}{7}\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

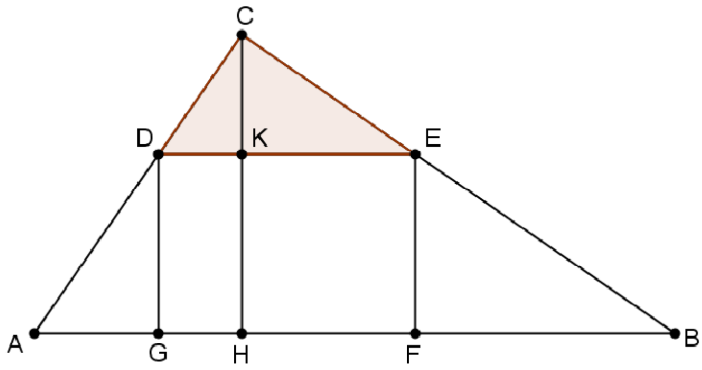
$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{48}{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{144 - \frac{2304}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{1296}{25}}\ cm = \frac{36}{5}\ cm$.

Si ricava quindi: $\overline{HK} = \overline{AK} - \overline{AH} = \left(\frac{60}{7} - \frac{36}{5}\right)\ cm = \frac{300-252}{35} = \frac{48}{35}\ cm$.

In definitiva l'area vale:

$S_{CHK} = \dfrac{1}{2}\overline{HK} \cdot \overline{CH} = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{48}{35} \cdot \dfrac{48}{5}\right) cm^2 = \dfrac{1152}{175}\ cm^2$

Un rettangolo di perimetro 28 cm è inscritto in un triangolo di base $\overline{AB} = 16\ cm$ e altezza $\overline{CH} = 12\ cm$. Calcola le dimensioni del rettangolo.



Soluzione

I triangoli ABC e CDE sono simili. Infatti:
L'angolo $\hat{C}$ è in comune
$\hat{A} \cong C\widehat{D}E$ perché corrispondenti ….
$\hat{B} \cong D\hat{E}C$ perché corrispondenti ….

Ricordando il teorema:

"In due triangoli simili le basi sono proporzionali alle rispettive altezze"

si ha:

$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CH} : \overline{CK}$

Ponendo $\overline{DG} = x$ $\Rightarrow$ $\overline{CK} = \overline{CH} - \overline{DG} = 12 - x$ $\overline{DE} = 14 - x$

$16 : (14 - x) = 12 : (12 - x)$;

$12 \cdot (14 - x) = 16 \cdot (12 - x)$;

$168 - 12x = 192 - 16x$;

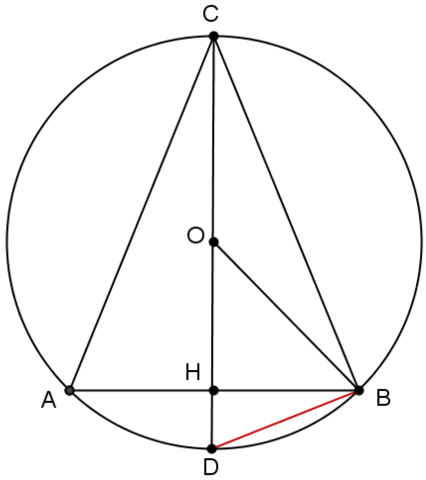
$-12x + 16x = 192 - 168$;

$4x = 24$;

$x = 6$.

Pertanto $\overline{DG} = 6\ cm$ è $\overline{DE} = 8\ cm$.

In una circonferenza di centro O inscrivi un triangolo isoscele avente la base di $16\ cm$ e i lati obliqui di $20\ cm$ ciascuno. Calcola la misura del raggio.



Soluzione 1

$\overline{BH} = \frac{\overline{AB}}{2} = 8\ cm$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{20^2 - 8^2}\ cm = \sqrt{336}\ cm = 4\sqrt{21}\ cm$

Applicando il I T. di Euclide al triangolo BCD si ha:

$\overline{BC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CD}$; $\qquad 20^2 = 4\sqrt{21} \cdot \overline{CD}$;

$\overline{CD} = \frac{400}{4\sqrt{21}} = \frac{100}{\sqrt{21}} = \frac{100}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{100\sqrt{21}}{21}$.

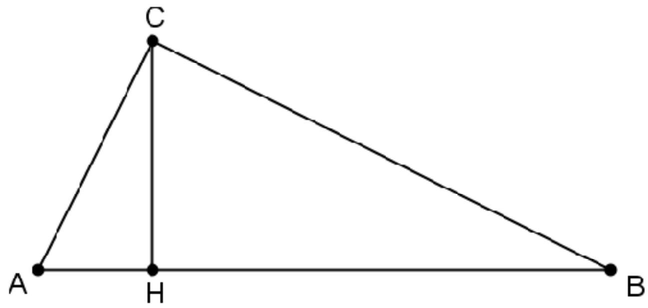
Pertanto il raggio misura:

$r = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{50\sqrt{21}}{21}\ cm$.

Problema 214.173

L'area di un triangolo rettangolo è 80 cm^2 e l'ipotenusa è lunga 20 cm . Calcola la misura dei cateti.

<u>*Soluzione 1*</u>



L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2\, S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 80}{20}\ cm = 8\ cm\ .$$

I triangoli ACH e BCH sono simili. Infatti:

$A\hat{H}C \cong B\hat{H}C \cong 90°$.

$A\hat{C}H \cong 90° - H\hat{C}B \cong \hat{B}$

Pertanto i lati corrispondenti sono proporzionali:

$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{HB}$

Ponendo $\overline{AH} = x$ e $\overline{HB} = 20 - x$ si ottiene:

$x : 8 = 8 : (20 - x)$; $\quad x \cdot (20 - x) = 8 \cdot 8$; $\quad 20x - x^2 = 64$;

$x^2 - 20x + 64 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 10^2 - 64 = 36$; $\quad x_{1,2} = 10 \mp 6 = \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 16 \end{matrix}$

Pertanto $\overline{AH} = 4\ cm$ e $\overline{HB} = 16\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}\ cm = \sqrt{64 + 16}\ cm = \sqrt{80}\ cm = 4\sqrt{5}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2}\ cm = \sqrt{64 + 256}\ cm = \sqrt{320}\ cm = 8\sqrt{5}\ cm$$

<u>*Soluzione 2*</u>

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2\, S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 80}{20}\ cm = 8\ cm\ .$$

Ponendo $\overline{AH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} = 20 - x$

Applicando il II T. di Euclide al triangolo ABC si ha:

$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$; $\quad 8^2 = x \cdot (20 - x)$; $\quad 64 = 20x - x^2$;

$x^2 - 20x + 64 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 10^2 - 64 = 36$; $\quad x_{1,2} = 10 \mp 6 = \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 16 \end{matrix}$

Pertanto $\overline{AH} = 4\ cm$ e $\overline{HB} = 16\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

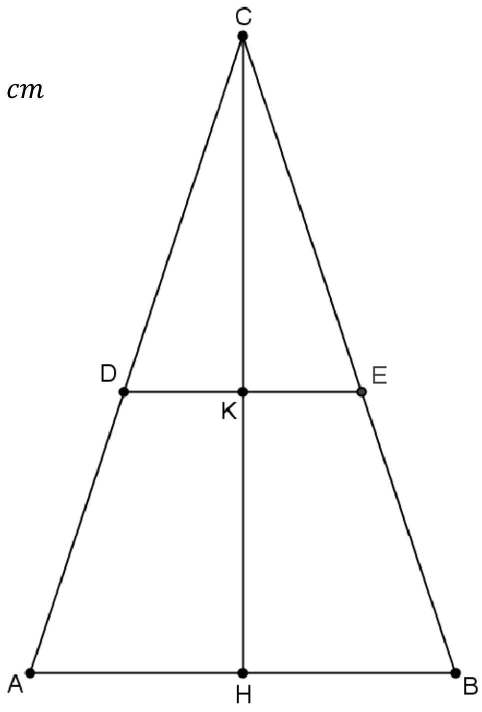
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}\ cm = \sqrt{64 + 16}\ cm = \sqrt{80}\ cm = 4\sqrt{5}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2}\ cm = \sqrt{64 + 256}\ cm = \sqrt{320}\ cm = 8\sqrt{5}\ cm$$

Problema 215.180

Nel triangolo isoscele raffigurato a lato, $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{AC} = 15\ cm$, $\overline{CD} = 5\ cm$ e $DE \parallel AB$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo CLM.



Soluzione

Il perimetro del triangolo ABC misura:

$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (10 + 15 + 15)\ cm = 40\ cm$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{225 - 25}\ cm = \sqrt{200}\ cm = 10\sqrt{2}\ cm$

L'area de triangolo ABC vale:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \left(\frac{1}{2}\ 10 \cdot 10\sqrt{2}\right) cm^2 = 50\sqrt{2}\ cm^2.$

I triangoli ABC e BCH sono simili. Infatti:
$\hat{C}$ è in comune
$C\widehat{D}E \cong \widehat{A}$ perché angoli corrispondenti fra $DE \parallel AB$ tagliate da AC
$C\hat{E}D \cong \hat{B}$ perché angoli corrispondenti fra $DE \parallel AB$ tagliate da BC

Ricordando il teorema:

"Il rapporto fra i perimetri di due triangoli simili è uguale al rapporto fra le misure dei lati corrispondenti",

si ottiene:

$2p_{ABC} : 2p_{CDE} = \overline{AC} : \overline{CD}$; $\qquad 40 : 2p_{CDE} = 15 : 5 \qquad 2p_{CDE} = \dfrac{40 \cdot 5}{15}\ cm = \dfrac{40}{3}\ cm$.

Ricordando il teorema:

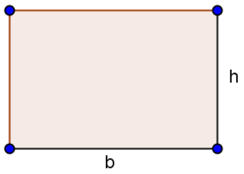
"Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure dei lati corrispondenti", si ha:

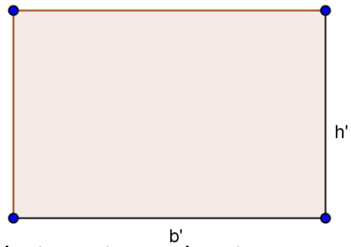
$\dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{AC}^2}$; $\qquad \dfrac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \dfrac{5^2}{15^2}$; $\qquad \dfrac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \dfrac{25}{225}$; $\qquad \dfrac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \dfrac{1}{9}$;

$S_{CDE} = \dfrac{50}{9}\sqrt{2}\ cm^2$.

Problema 215.181

Un rettangolo il cui perimetro è 15a è simile a un altro rettangolo la cui base è 8a e la cui altezza è 2a. Calcola la misura dei lati e l'area del primo rettangolo.





Soluzione

Il perimetro del rettangolo R^I è

$p_{R^I} = 2 \cdot (8a + 2a) = 20a$

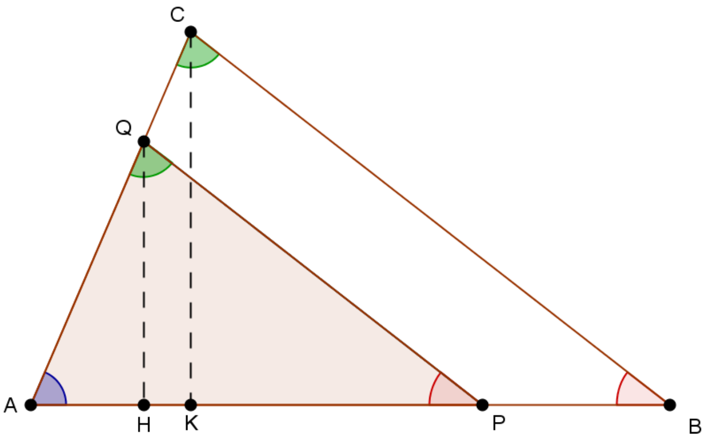
Essendo i due rettangoli R e R^I simili, si ha che i perimetri sono proporzionali ai lati corrispondenti:

$p_R : p_{R^I} = b : b^I$

$15a : 20a = b : 8a$ da cui si ottiene: $b = \frac{15a \cdot 8a}{20a} = 6a$.

L'altezza $h = \frac{15}{2}a - 6a = \frac{3}{2}a$. L'area del rettangolo R è: $S = b \cdot h = 6a \cdot \frac{3}{2}a = 9a^2$.

Il lato AB di un triangolo ABC misura a. Conduci da un punto P di AB la parallela PQ a un altro lato in modo che il triangolo risulti suddiviso in due poligoni equivalenti.



Soluzione 1

Poniamo $\overline{AP} = x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < a$

I due triangoli APQ e ABC sono simili perché:

- l'angolo $\hat{A}$ è in comune
- $A\hat{Q}P \cong A\hat{C}B$ *(angoli corrispondenti)*
- $A\hat{P}Q \cong A\hat{B}C$ *(angoli corrispondenti)*

Pertanto i due triangoli APQ e ABC hanno i lati proporzionali alle altezze corrispondenti:

$\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{QH} : \overline{CK}$ $\quad x : a = \overline{QH} : \overline{CK}$; da cui si ottiene: $\overline{QH} = \frac{x}{a}\overline{CK}$

L'equivalenza fra il triangolo APQ e il trapezio $BCQP$	$\Leftrightarrow$	l'area del triangolo ABC è il doppio dell'area del triangolo APQ

In simboli: $(APQ \doteq BCQP) \Leftrightarrow (ABC \doteq 2 \cdot APQ) \Leftrightarrow S_{ABC} = 2 \cdot S_{APQ}$

Sostituendo i dati conosciuti si ha:

$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CK}}{2} = 2 \cdot \frac{\overline{AP}\cdot\overline{QH}}{2}$; $\quad \overline{AB} \cdot \overline{CK} = 2 \cdot (\overline{AP} \cdot \overline{QH})$;

$a \cdot \cancel{\overline{CK}} = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{a}\cancel{\overline{CK}}$; dividendo per $\overline{CK} \neq 0$ si ottiene:

$a = 2 \cdot \frac{x^2}{a}$; $\quad a^2 = 2x^2$; $\quad x^2 = \frac{a^2}{2}$;

$$x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}a = \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a & \textit{non accettabile} \\ \boxed{x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}a} & \textit{accettabile} \end{cases}$$

Soluzione 2

Ricordando il teorema:

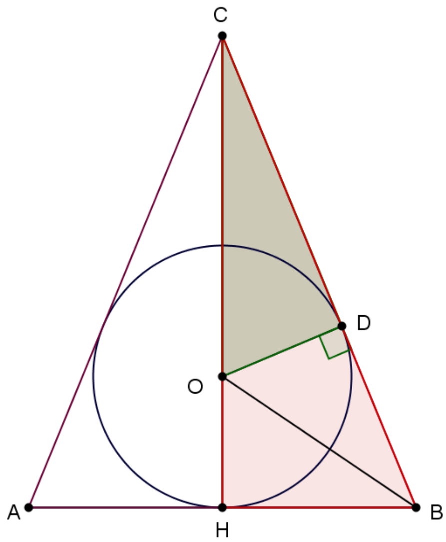
"Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure dei lati corrispondenti", si ha:

$\overline{AB}^2 : \overline{AP}^2 = S_{ABC} : S_{APQ}$; $\quad a^2 : x^2 = 2\,S_{APQ} : S_{APQ}$;

$x^2 = \frac{a^2 \cdot S_{APQ}}{2S_{APQ}}$; $\quad x^2 = \frac{1}{2}a^2$;

$$x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}a = \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a & \textit{non accettabile} \\ \boxed{x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}a} & \textit{accettabile} \end{cases}$$

Considera una circonferenza avente il raggio di $3\ cm$ e circoscrivi a essa un triangolo isoscele ABC sulla base AB. Il rapporto tra l'altezza CH e la base è $\frac{6}{5}$. Determina le lunghezze dei lati del triangolo.



Soluzione

Poniamo $\overline{HB} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2x$

$\overline{CH} = \frac{6}{5}2x = \frac{12}{5}x$

$\overline{CO} = \frac{12}{5}x - 3$

$\overline{BC} = \sqrt{\frac{144}{25}x^2 + x^2} = \sqrt{\frac{169}{25}x^2} = \frac{13}{5}x$.

Dalla similitudine dei triangoli COD e CBH si ottiene:

$\overline{CO} : \overline{CB} = \overline{OD} : \overline{HB}$; $\qquad \left(\frac{12}{5}x - 3\right) : \frac{13}{5}x = 3 : x$

$\frac{39}{5}x = x \cdot \left(\frac{12}{5}x - 3\right)$; $\qquad \frac{39}{5}x = \frac{12}{5}x^2 - 3x$; $\qquad 12x^2 - 54x = 0$;

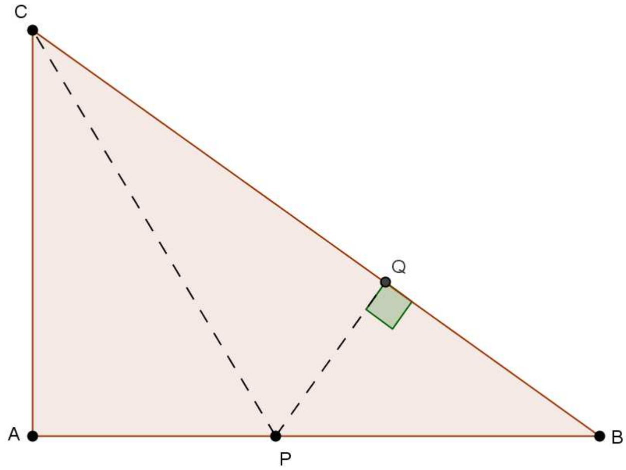
$2x^2 - 9x = 0$; $\quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{9}{2} \end{matrix}$

Pertanto:

$\overline{AB} = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9\ cm$

$\overline{BC} = \frac{13}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{117}{10} = 11{,}7\ cm$.

É dato un triangolo rettangolo ABC il cui cateto AB è $12\ cm$. Si sa, inoltre, che il cateto AC è $\frac{3}{4}$ di AB. Determina su AB un punto P in modo tale che, detta Q la sua proiezione ortogonale su BC, sussista la relazione: $\overline{PC}^2 + 2\overline{PQ}^2 = 40\overline{AP}^2 - 3$.



Soluzione

Calcoliamo innanzitutto le misure degli altri due lati:

$$\overline{AC} = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9\ cm$$

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15\ cm$$

Indicando: $\overline{AP} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = 12 - x$ con i vincoli geometrici $0 < x < 12$.

Dalla similitudine dei due triangoli ABC e PBQ (l'angolo $\hat{B}$ in comune e $\hat{A} = P\hat{Q}B = 90°$) si ottiene:

$$\overline{PQ} : \overline{AC} = \overline{PB} : \overline{CB} ; \qquad \overline{PQ} : 9 = (12 - x) : 15 ; \qquad \overline{PQ} = \frac{9 \cdot (12 - x)}{15} = \frac{3}{5}(12 - x) .$$

Mentre

$$\overline{QB} : \overline{AB} = \overline{PB} : \overline{CB} ; \qquad \overline{QB} : 12 = (12 - x) : 15 ; \qquad \overline{QB} = \frac{12 \cdot (12 - x)}{15} = \frac{4}{5}(12 - x) .$$

Pertanto:

$$\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{QB} = 15 - \frac{4}{5}(12 - x) = \frac{75 - 48 + 4x}{5} = \frac{27 + 4x}{5}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo CPQ si ricava:

$$\overline{PC}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = \left[\frac{3}{5}(12 - x)\right]^2 + \left(\frac{27 + 4x}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}(144 + x^2 - 24x) + \frac{729 + 16x^2 + 216x}{25} =$$

$$= \frac{1296 + 9x^2 - 216x + 729 + 16x^2 + 216x}{25} = \frac{2025 + 25x^2}{25} = 81 + x^2 .$$

Sostituendo le espressioni trovate nella relazione: $\overline{PC}^2 + 2\overline{PQ}^2 = 40\overline{AP}^2 - 3$ si ottiene:

$$81 + x^2 + 2 \cdot \frac{9}{25}(144 + x^2 - 24x) = 40x^2 - 3 ;$$

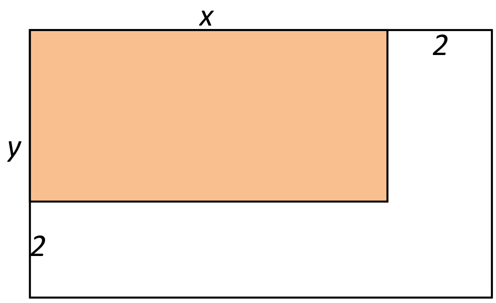
Da cui si ricavano le radici: $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{782}{319}$.

Di queste radici soltanto quella positiva è accettabile.

Pertanto il punto P si trova a 2 cm dal vertice A.

Problema 215.193

Un rettangolo ha la superficie di 80 cm^2. Se si aumentano le sue dimensioni ciascuna di 2 cm, l'area aumenta di 46 cm^2. Calcola la misura delle dimensioni.



Soluzione

Ponendo le dimensioni del rettangolo uguali a x e y.

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 80 \\ (x+2)(y+2) = 80 + 46 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ xy + 2x + 2y + 4 = 126 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ xy + 2x + 2y = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ x \cdot \dfrac{80}{x} + 2x + 2 \cdot \dfrac{80}{x} = 122 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ 80 + 2x + \dfrac{160}{x} - 122 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ 80x + 2x^2 + 160 - 122x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ 2x^2 - 42x + 160 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ x^2 - 21x + 80 = 0 \end{cases}$$

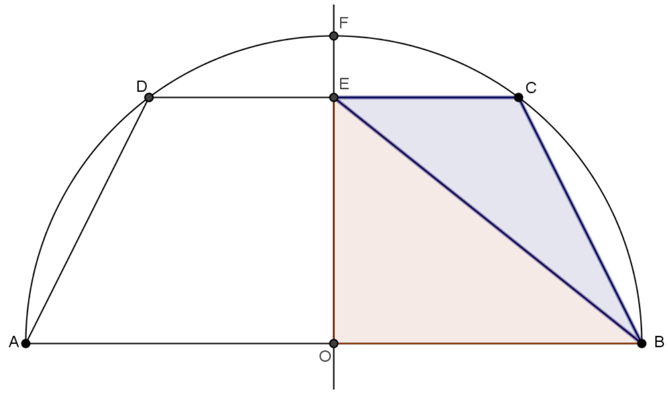
Da cui si ricava:

$$x_{1,2} = \frac{21 \mp \sqrt{441 - 320}}{2} = \frac{21 \mp 11}{2} = \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 16 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 16 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Le dimensioni del rettangolo sono pertanto: $b = 16\ cm$ e $h = 5\ cm$.

Problema 215.194

Stabilisci se si può inscrivere un trapezio isoscele che ha il perimetro di $20\ cm$ in una semicirconferenza di raggio $5\ cm$.



Soluzione

La base del trapezio deve coincidere con il diametro. Pertanto $\overline{AB} = 10\ cm$.

Quindi: $\overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DC}} + \overline{\mathrm{CD}} = 10\ cm$.

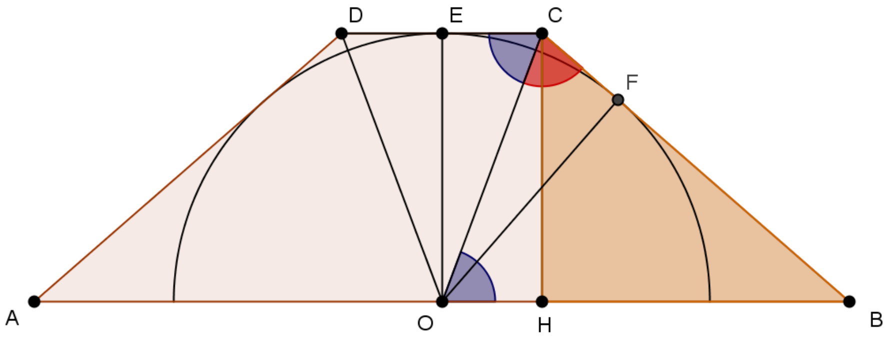
Cioè: $\overline{\mathrm{EC}} + \overline{\mathrm{CB}} = 5\ cm$. Ma ciò non può sussistere.

Infatti, ricordando che:

- la somma di due qualsiasi lati di un triangolo è maggiore del terzo
- in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno cateto

si ha che: $\overline{\mathrm{EC}} + \overline{\mathrm{CB}} > \overline{\mathrm{EB}} > \overline{\mathrm{OB}} = 5$.

Un trapezio isoscele è circoscritto a un semicerchio di raggio r. Sapendo che la base minore è parallela al diametro ed è lunga $\frac{3}{4}r$, determina il perimetro e l'area del trapezio.



Soluzione

Essendo $\overline{DC} = \frac{3}{4}r \quad \Rightarrow \quad \overline{EC} = \frac{3}{8}r$ e $\overline{OH} = \frac{3}{8}r$

$B\hat{O}C \cong O\hat{C}E$ perché alterni interni

$O\hat{C}E \cong O\hat{C}F$ perché CE e CF sono tangenti alla circonferenza. $\Rightarrow \quad B\hat{O}C \cong O\hat{C}F$

Il che dimostra che il triangolo OBC è isoscele con $OB \cong BC$.

Poniamo $\overline{OB} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} = x - \frac{3}{8}r$

Con i limiti geometrici: $x > r$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{BC}^2$;

$$r^2 + \left(x - \frac{3}{8}r\right)^2 = x^2 \; ; \qquad r^2 + x^2 + \frac{9}{64}r^2 - \frac{3}{4}rx = x^2 \; ; \qquad \frac{73}{64}r^2 - \frac{3}{4}rx = 0 \; ;$$

$$\frac{3}{4}rx = \frac{73}{64}r^2 \; ; \qquad x = \frac{73}{64}r^2 \cdot \frac{4}{3r} \; ; \qquad x = \frac{73}{48}r$$

Pertanto $\overline{BC} = \frac{73}{48}r$ e $\overline{AB} = 2 \cdot \frac{73}{48}r = \frac{73}{24}r$

In definitiva il perimetro del trapezio è:

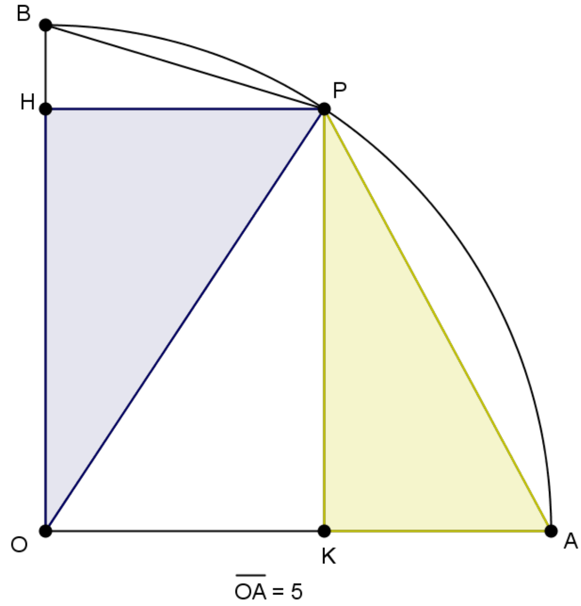
$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \frac{73}{24}r + \frac{73}{48}r + \frac{3}{4}r + \frac{73}{48}r = \frac{328}{48}r = \frac{41}{6}r \, .$$

Mentre l'area è:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{73}{24}r + \frac{3}{4}r\right) \cdot r = \frac{91}{48}r^2 \, .$$

Problema 215.196

Disegna un arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O il cui raggio $5\ cm$. Fissa su AB un punto P e indica con H la sua proiezione sul lato OB. Determina la misura di PH in modo che: $\overline{AP} + 2\overline{PH} = 11$.



Soluzione

Poniamo $\overline{PH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PA} = 11 - 2x \quad$ e $\quad \overline{KA} = 5 - x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < 5$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo OPH si ha:

$\overline{OH} = \sqrt{25 - x^2}$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo PAK si ha:

$\overline{KA}^2 + \overline{PK}^2 = \overline{PA}^2$;

$(5 - x)^2 + \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = (11 - 2x)^2$;

$25 + x^2 - 10x + 25 - x^2 = 121 + 4x^2 - 44x$;

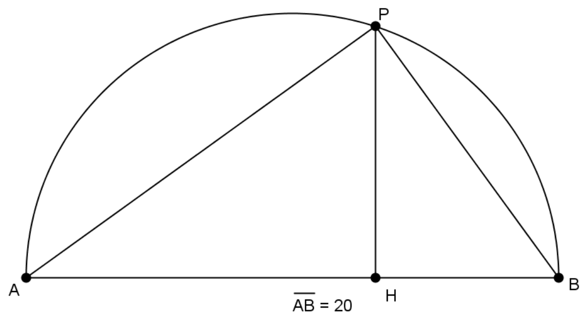
$4x^2 - 34x + 71 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{17 \mp \sqrt{289 - 284}}{4} = \frac{17 \mp \sqrt{5}}{4}.$$

Soluzioni entrambe accettabili, perché rispettano i limiti geometrici.

Problema 215.198

Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 20\ cm$, individua un punto P in modo tale che $2\overline{AP} = 3\overline{PB}$.



Soluzione

Poniamo $\overline{AP} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = \frac{3}{2}x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < 20$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABP si ha:

$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$

$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 400$; $\qquad 4x^2 + 9x^2 = 1600$; $\qquad 13x^2 = 1600$; $\qquad x^2 = \frac{1600}{13}$; $\qquad x = \mp\frac{40}{13}\sqrt{13}$

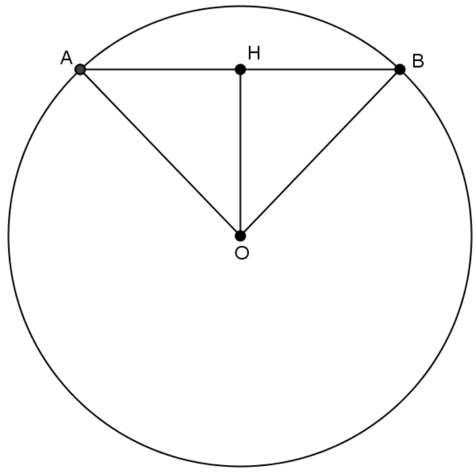
Soltanto la soluzione positiva è accettabile. Pertanto $\overline{AP} = \frac{40}{13}\sqrt{13}\ cm$.

Applicando il I° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABP si ha: $\overline{AP}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$

Da cui si ottiene: $\overline{AH} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AB}} = \frac{1600}{13} \cdot \frac{1}{20} = \frac{80}{13}$.

Problema 218.206

Il raggio di una circonferenza di centro O è $10\ cm$. Conduci una corda AB e indica con H il piede della perpendicolare condotta da O ad AB. Trova a quale distanza dal centro O si deve tracciare la corda affinché sussista la relazione $\overline{AB} + \overline{OH} = 22\ cm$.



Soluzione

Poniamo $\overline{OH} = x$ con i limiti geometrici: $0 < x < 10$.

$\overline{AH} = \sqrt{100 - x^2}$ $\Longrightarrow$ $\overline{AB} = 2\sqrt{100 - x^2}$

Sostituendo nella relazione $\overline{AB} + \overline{OH} = 22\ cm$ si ottiene:

$2\sqrt{100 - x^2} + x = 22$; $2\sqrt{100 - x^2} = 22 - x$

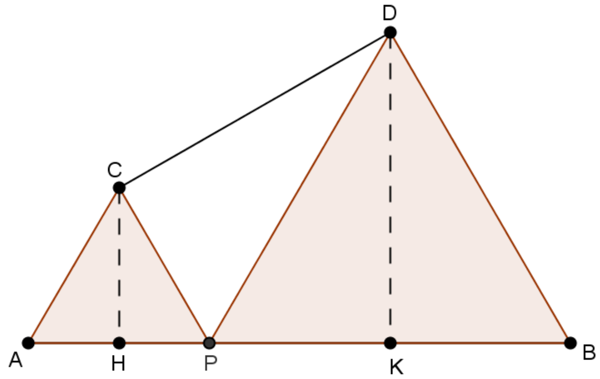
$4(100 - x^2) = 484 + x^2 - 44x$;

$400 - 4x^2 - 484 - x^2 + 44x = 0$;

$5x^2 - 44x + 84 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{22 \mp \sqrt{484 - 420}}{a} = \frac{22 \mp \sqrt{64}}{5} = \frac{22 \mp 8}{5} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{14}{5} \\ x_2 = 6 \end{array}$$

Considera un segmento AB lungo $9\ cm$. Tra gli estremi A e B prendi un punto P e costruisci, dalla stessa parte, i due triangoli equilateri APC e PBD. Calcola quale distanza deve avere P da A affinché risulti: $S_{CPD} = \frac{1}{2} S_{PBD}$.



Soluzione

Poniamo $\overline{AP} = x$ con i limiti geometrici: $0 < x < 9$.

$\overline{PB} = 9 - x$ $\qquad \overline{PH} = \dfrac{x}{2}$ $\qquad \overline{PK} = \dfrac{9-x}{2}$

$\overline{CH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ $\qquad \overline{DK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(9-x)$

Sostituendo nella relazione: $S_{CPD} = \frac{1}{2} S_{PBD}$ si ottiene:

$$S_{CDKH} - S_{PCH} - S_{PDK} = \frac{1}{2} S_{PBD}$$

$$\frac{1}{2}(\overline{DK} + \overline{CH}) \cdot \overline{HK} - \frac{1}{2}\overline{PH} \cdot \overline{CH} - \frac{1}{2}\overline{PK} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{DK}\ ;$$

$$(\overline{DK} + \overline{CH}) \cdot \overline{HK} - \overline{PH} \cdot \overline{CH} - \overline{PK} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{DK}\ ;$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(9-x) + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{9-x}{2}\right) - \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{9-x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(9-x) = \frac{1}{2}(9-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(9-x)\ ;$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(9-x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(9-x)^2\ ;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(9-x)^2 = 0\ ;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(81 + x^2 - 18x) = 0\ ;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{81\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 9\sqrt{3}x = 0\ ;$$

$$81\sqrt{3} - \sqrt{3}x^2 - 162\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x^2 + 36\sqrt{3}x = 0\ ;$$

$$-3\sqrt{3}x^2 + 36\sqrt{3}x - 81\sqrt{3} = 0\ ;$$

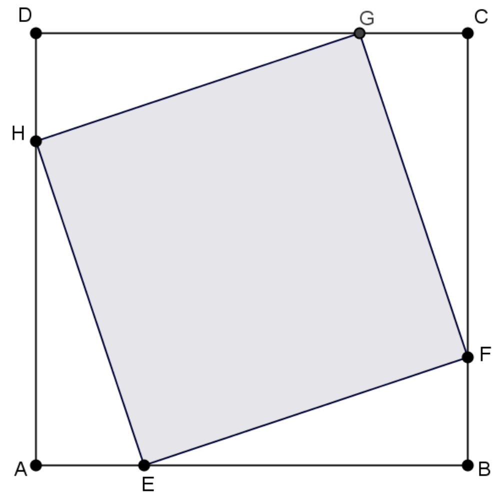
$$x^2 - 12x + 27 = 0\ ;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{6 \mp \sqrt{36-27}}{1} = 6 \mp 3 = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{matrix}$$

Soltanto la soluzione positiva: $x = 3$ è accettabile.

Pertanto $\overline{AP} = 3$.

Un quadrato $ABCD$ ha l'area di $75a^2$. Inscrivi in esso un altro quadrato $EFGH$ la cui area sia $39a^2$. Calcola le lunghezze di AE e di EB.



Soluzione

$S_{ABCD} = 75a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} = 5\sqrt{3}a$

$S_{EFGH} = 39a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{EF} = \sqrt{39}a$

Poniamo $\overline{AE} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{EB} = 5\sqrt{3}a - x$

con i limiti geometrici: $0 < x < 5\sqrt{3}a$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo EBF si ha:

$\overline{EB}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{EF}^2$

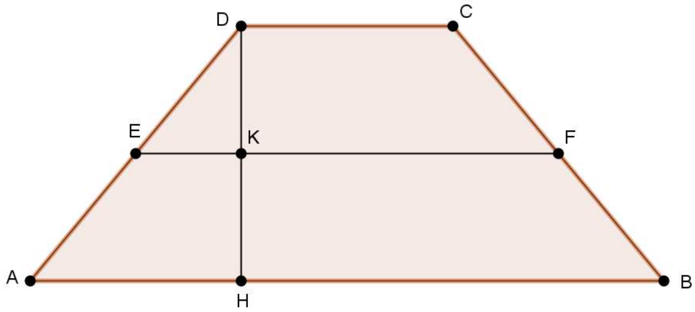
$\left(5\sqrt{3}a - x\right)^2 + x^2 = \left(\sqrt{39}a\right)^2$; $\qquad 75a^2 + x^2 - 10\sqrt{3}ax + x^2 = 39a^2$;

$2x^2 - 10\sqrt{3}ax + 36a^2 = 0$; $\qquad x^2 - 5\sqrt{3}ax + 18a^2 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5\sqrt{3}a \mp \sqrt{75a^2 - 72a^2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}a \mp \sqrt{3}a}{2} = \begin{matrix} x_1 = 2\sqrt{3}a \\ x_2 = 3\sqrt{3}a \end{matrix}$$

Soluzioni entrambe accettabili.

Un trapezio isoscele che ha la base maggiore di $28\,cm$, la minore di $10\,cm$ e l'altezza di $12\,cm$, si deve suddividere, mediante una parallela alle basi, in due trapezi aventi l'area uguale. Trova a quale distanza dalla base minore si deve tracciare la parallela.



Soluzione

$S_{ABCD} = \frac{10+28}{2} \cdot 16 = 228\,cm^2 \;\; \Rightarrow \;\; S_{DCEF} = 114\,cm^2$

Poniamo $\overline{DK} = x$

con i limiti geometrici: $0 < x < 12$.

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} = 9\,cm$$

Dalla similitudine dei triangoli ADH e DEK si ha: $\overline{EK} : \overline{AH} = \overline{DK} : \overline{DH}$; $\quad \overline{EK} : 9 = x : 12$

Da cui si ricava: $\overline{EK} = \frac{3}{4}x$.

Sostituendo nella relazione: $S_{DCEF} = 114\,cm^2$ si ottiene:

$$\frac{\overline{EF} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DK} = 114 \; ; \qquad (\overline{EF} + \overline{DC}) \cdot \overline{DK} = 228 \; ; \qquad \left(10 + \frac{3}{2}x + 10\right) \cdot x = 228 \; ;$$

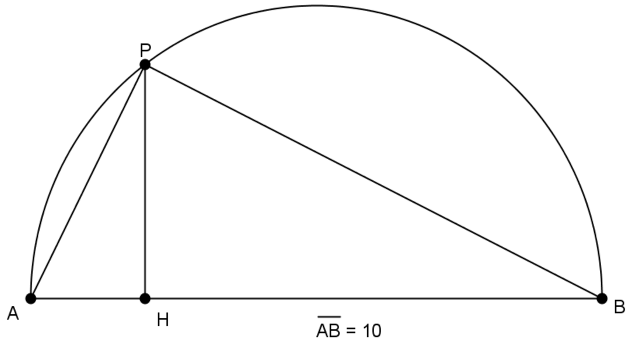
$$20x + \frac{3}{2}x^2 = 228 \; ; \qquad 3x^2 + 40x - 456 = 0 \; ;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1368}}{3} = \frac{-20 \pm \sqrt{1768}}{3} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{442}}{3} .$$

Scartando la soluzione negativa, si ha:

$$\overline{DK} = \frac{-20 + 2\sqrt{442}}{3}\;cm$$

Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10\ cm$, trova un punto P in modo tale che, detta H la sua proiezione su AB, sia $\overline{AH} + \overline{PB} = 12\ cm$.



Soluzione

Poniamo $\overline{AH} = x$ e $\overline{PB} = y$

con i limiti geometrici: $0 < x < 10$ e $0 < y < 10$

Per il I° T. di Euclide applicato al triangolo rettangolo ABP si ha:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y^2 = 10 \cdot (10 - x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 12 - x \\ (12 - x)^2 = 100 - 10x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 12 - x \\ 144 + x^2 - 24x - 100 + 10x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 - x \\ x^2 - 14x + 44 = 0 \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 44}}{1} = 7 \pm \sqrt{5}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili perché entrambe positive e minori di 10.