Liceo Classico Alessio di Turi Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : T. Pitagora – T. Euclide

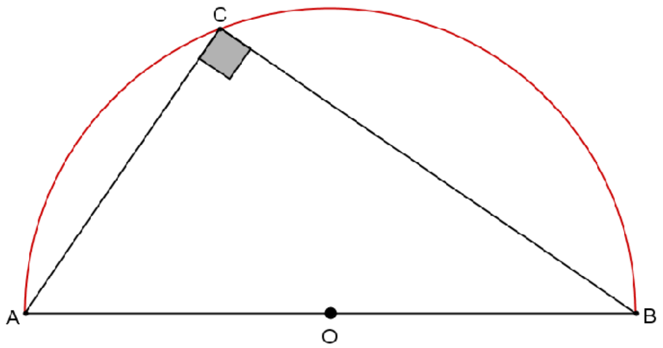
11.05.2012

prof. Mimmo Corrado

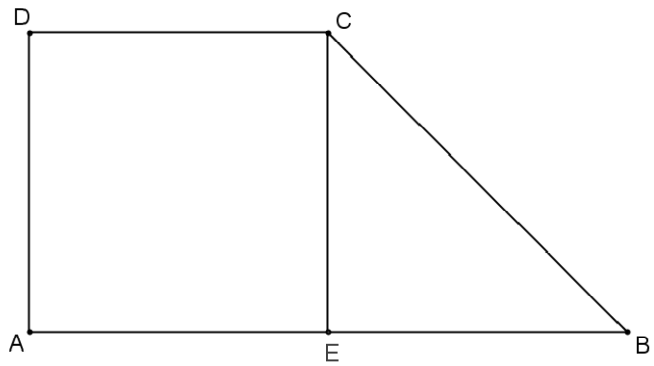
Alunno: ______________________________________ Classe: 5 B

1. In un rettangolo di area $600\ cm^2$, la base è i $\frac{4}{5}$ della diagonale. Determina il perimetro del rettangolo.

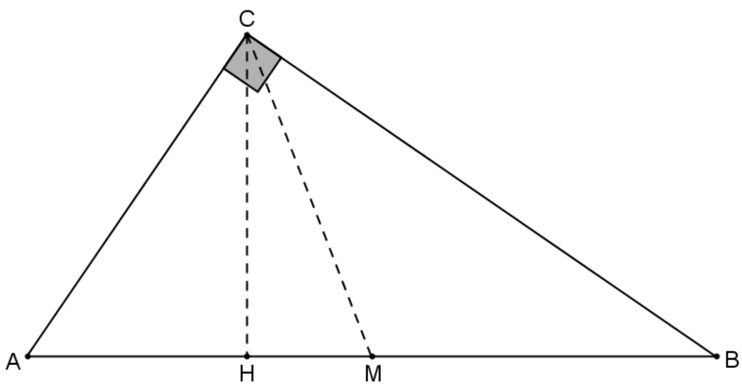
2. Il diametro di una semicirconferenza misura $30\ cm$. Calcola il perimetro del triangolo inscritto nella semicirconferenza, sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{4}{3}$ dell'altro. Calcola inoltre le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.



3. L'altezza di un trapezio rettangolo è congruente alla base minore e alla metà della base maggiore. Sapendo che il perimetro è $(4+\sqrt{2})\ cm$, calcola l'area.



4. Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa AB, la mediana CM è lunga $61\ m$. L'altezza relativa all'ipotenusa CH è i $\frac{60}{11}$ del segmento HM. Calcola il perimetro del triangolo ABC.

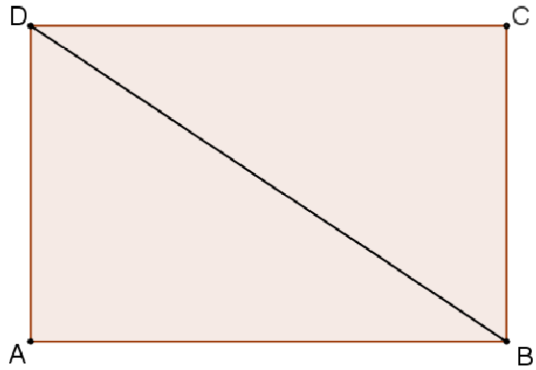


Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	Totale
	Punti	20	20	20	20	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. In un rettangolo di area 600 cm^2 , la base è i $\frac{4}{5}$ della diagonale. Determina il perimetro del rettangolo.



$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} S = 600\ cm^2 \\ \overline{AB} \cong \frac{4}{5}\ \overline{BD} \end{cases} \qquad\qquad 2p_{ABCD} = ?$$

Soluzione

Poniamo $\overline{BD} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} \cong \frac{4}{5}\ x$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABD si ha:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{4}{5}x\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{16}{25}x^2} = \sqrt{\frac{9}{25}x^2} = \frac{3}{5}x\ .$$

Ricordando che: $S = 600\ cm^2$ si ottiene:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 600\ ; \qquad \frac{4}{5}\ x \cdot \frac{3}{5}x = 600\ ; \qquad \frac{12}{25}x^2 = 600\ ; \qquad x^2 = \frac{25}{12} \cdot 600\ ;$$

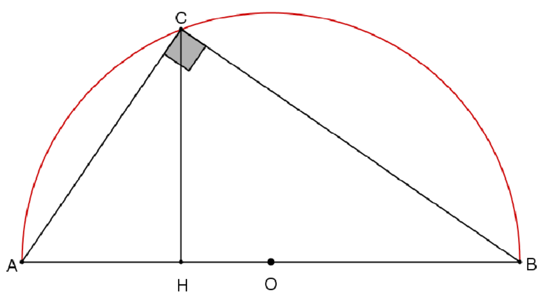
$$x^2 = 1250\ ; \qquad x = \mp\sqrt{1250} = \mp\sqrt{625} \cdot \sqrt{2} = \mp 25\sqrt{2}\ .$$

Pertanto, scartando la soluzione negativa si ha:

$$\overline{BD} = 25\sqrt{2}\ cm \qquad \overline{AB} \cong \frac{4}{5} \cdot 25\sqrt{2}\ cm = 20\sqrt{2}\ cm \qquad \overline{AD} = \frac{3}{5} \cdot 25\sqrt{2}\ cm = 15\sqrt{2}\ cm$$

Il perimetro è quindi: $2p = 2(\overline{AB} + \overline{AD}) = 2\left(20\sqrt{2} + 15\sqrt{2}\right)\ cm = 2\left(35\sqrt{2}\right)\ cm = 70\sqrt{2}\ cm$.

2. Il diametro di una semicirconferenza misura 30 cm. Calcola il perimetro del triangolo inscritto nella semicirconferenza, sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{4}{3}$ dell'altro. Calcola inoltre le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.



$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} \overline{AB} \cong 30\ cm \\ \overline{BC} \cong \frac{4}{3}\overline{AC} \end{cases} \qquad\qquad \begin{matrix} 2p_{ABC} = ? \\ AH = ? \\ HB = ? \end{matrix}$$

Soluzione

Poniamo $\overline{AC} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} \cong \frac{4}{3}\ x$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 30^2\ ; \qquad x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 900\ ; \qquad x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 900\ ; \qquad \frac{25}{9}x^2 = 900\ ;$$

$$x^2 = \frac{9}{25} \cdot 900\ ; \qquad x^2 = 324\ ; \qquad x = \mp\sqrt{324} = \mp 18\ .$$

Pertanto, scartando la soluzione negativa si ha:

$$\overline{AC} = 18\ cm \qquad \overline{BC} \cong \frac{4}{3} \cdot 18\ cm = 24\ cm$$

Applicando il 1° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

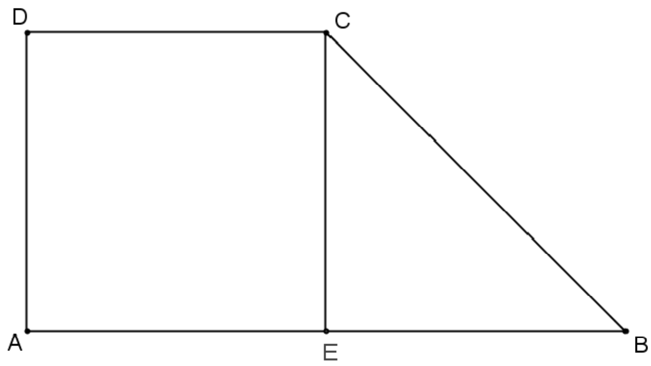
$\overline{AC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$; da cui si ottiene:

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \frac{18^2}{30} cm = \frac{324}{30} cm = \frac{54}{5} cm .$$

L'altra proiezione:

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = \left(30 - \frac{54}{5}\right) cm = \frac{96}{5} cm$$

3. L'altezza di un trapezio rettangolo è congruente alla base minore e alla metà della base maggiore. Sapendo che il perimetro è $(4 + \sqrt{2}\,)\, cm$, calcola l'area.



$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} \overline{AD} \cong \overline{DC} \\ \overline{AB} \cong 2\,\overline{AD} \\ 2P_{ABCD} = (4 + \sqrt{2})\, cm \end{cases} \qquad S_{ABCD} = ?$$

Soluzione

Poniamo $\overline{AD} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = x \qquad \overline{AB} = 2x$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCE si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\, x .$$

Applicando la formula del perimetro si ha:

$2P_{ABCD} = 4 + \sqrt{2}$; $\qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 4 + \sqrt{2}$; $\qquad 2x + \sqrt{2}\, x + x + x = 4 + \sqrt{2}$;

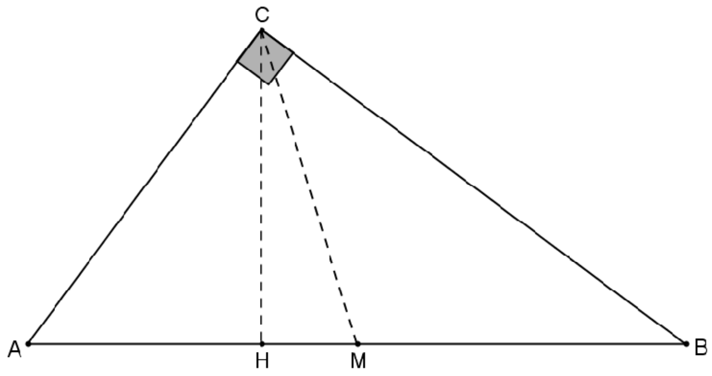
$4x + \sqrt{2}\, x = 4 + \sqrt{2}$; $\qquad (4 + \sqrt{2})x = 4 + \sqrt{2}$; $\qquad x = 1$.

Pertanto: $\overline{AD} = 1\, cm$; $\qquad \overline{DC} = 1\, cm \qquad \overline{AB} = 2\, cm \qquad \overline{BC} = \sqrt{2}\, cm$.

L'area è quindi:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{2 + 1}{2} \cdot 1\, cm^2 = \frac{3}{2}\, cm^2 .$$

4. Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa AB, la mediana CM è lunga $61\ cm$. L'altezza relativa all'ipotenusa CH è i $\frac{60}{11}$ del segmento HM. Calcola il perimetro del triangolo ABC.



$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} \hat{C} = 90° \\ \overline{AM} \cong \overline{MB} \\ \overline{CM} = 61\ cm \\ \overline{CH} = \dfrac{60}{11}\overline{HM} \end{cases} \qquad 2p_{ABC} = ?$$

Soluzione

Ricordando che in un triangolo la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa, si ha che:

$\overline{AB} = 2\overline{CM} = 122\ cm$ e $\overline{AM} = \overline{MB} = 61\ cm$

Poniamo $\overline{HM} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{CH} = \frac{60}{11}x$

Mentre: $\overline{AH} = \overline{AM} - \overline{HM} = 61 - x$ e $\overline{HB} = \overline{HM} + \overline{MB} = x + 61$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo CHM si ha:

$$\overline{CH}^2 + \overline{HM}^2 = \overline{CM}^2\ ; \qquad \left(\frac{60}{11}x\right)^2 + x^2 = 61^2\ ; \qquad \frac{3600}{121}x^2 + x^2 = 3721\ ; \qquad \frac{3721}{121}x^2 = 3721\ ;$$

$$x^2 = \frac{121}{3721} \cdot 3721\ ; \qquad x^2 = 121\ ; \qquad x = \mp\sqrt{121} = \mp 11\ .$$

Pertanto, scartando la soluzione negativa, si ha: $\overline{HM} = 11\ cm$.

Inoltre $\overline{CH} = \dfrac{60}{11} \cdot 11 = 60\ cm \qquad \overline{AH} = (61 - 11)\ cm = 50\ cm \qquad \overline{HB} = (11 + 61)\ cm = 72\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ACH si ha:

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2} = \sqrt{50^2 + 60^2}\ \mathrm{cm} = \sqrt{2500 + 3600}\ \mathrm{cm} = \sqrt{6100}\ \mathrm{cm} = \sqrt{61} \cdot \sqrt{100}\ \mathrm{cm} = 10\sqrt{61}\ \mathrm{cm}\ .$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{72^2 + 60^2}\ cm = \sqrt{5184 + 3600}\ cm = \sqrt{8784}\ cm = \sqrt{61} \cdot \sqrt{144}\ cm = 12\sqrt{61}\ cm\ .$$

Pertanto il perimetro del triangolo è:

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(122 + 12\sqrt{61} + 10\sqrt{61}\right) cm = \left(122 + 22\sqrt{61}\right) cm\ .$$