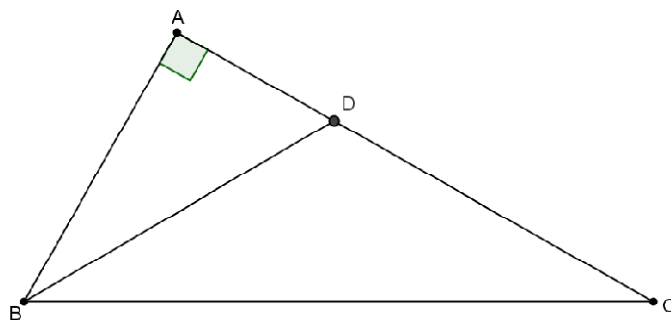


SIMILITUDINE

Problemi

Problema 228.179

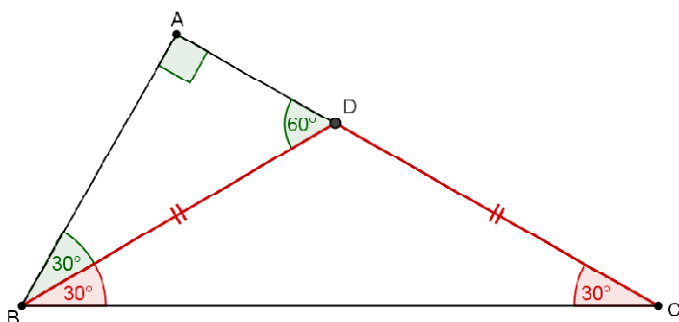
Un triangolo rettangolo ABC ha l'angolo $\hat{B} = 60^\circ$. La bisettrice BD dell'angolo \hat{B} misura 6 cm . Calcola il perimetro del triangolo ABC .



Soluzione

La bisettrice divide l'angolo $\hat{B} = 60^\circ$ in due angoli di 30° , quindi il triangolo EBC è isoscele.

Pertanto $\overline{BD} = \overline{CD} = 6\text{ cm}$.



Il triangolo ADB è la metà di un triangolo equilatero.

Pertanto $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 3\text{ cm}$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABD si ha:

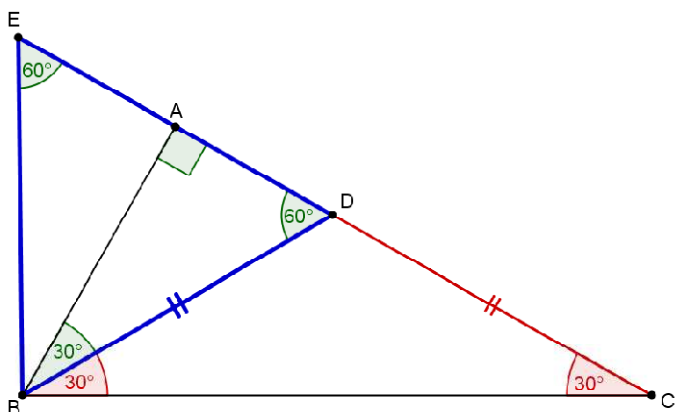
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2}\text{ cm} = \\ &= \sqrt{36 - 9}\text{ cm} = \sqrt{27}\text{ cm} = 3\sqrt{3}\text{ cm}.\end{aligned}$$

Pertanto $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = (3 + 6)\text{ cm} = 9\text{ cm}$.

Mentre $\overline{BC} = 2\overline{AB} = 6\sqrt{3}\text{ cm}$.

La misura del perimetro del triangolo ABC è:

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9)\text{ cm} = (9\sqrt{3} + 9)\text{ cm} = 9(\sqrt{3} + 1)\text{ cm}.$$



Nel triangolo rettangolo ABC raffigurato a lato, $\overline{AC} = 12 \text{ cm}$ $\overline{AB} = 16 \text{ cm}$, $\overline{BH} = \overline{HC}$, $D\hat{H}B = 90^\circ$.
 Calcola l'area del triangolo PBH .

Soluzione

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = \\ &= \sqrt{256 + 144} \text{ cm} = \sqrt{400} \text{ cm} = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Pertanto $\overline{BH} = \overline{HC} = 10 \text{ cm}$.

I triangoli ABC e BDH sono simili. Infatti:

L'angolo \hat{B} è in comune

$\hat{A} \cong \hat{DHB}$ perché entrambi retti.

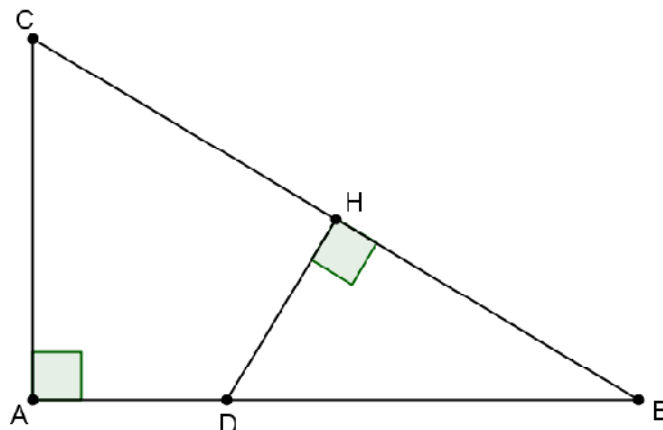
Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$$\overline{BH} : \overline{AB} = \overline{DH} : \overline{AC} ;$$

$$10 : 16 = \overline{DH} : 12 ; \quad \overline{DH} = \frac{10 \cdot 12}{16} \text{ cm} = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

In definitiva l'area vale:

$$S_{CHK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{DH} = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} \right) \text{ cm}^2 = \frac{75}{2} \text{ cm}^2$$



Nel triangolo rettangolo ABC raffigurato a lato, $\overline{AB} = 9 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 12 \text{ cm}$ e $\widehat{K} = 90^\circ$. Calcola il perimetro del triangolo AHK .

Soluzione 1

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} \text{ cm} = \\ &= \sqrt{81 + 144} \text{ cm} = \sqrt{225} \text{ cm} = 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2$$

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{AH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 54}{15} \text{ cm} = \frac{36}{5} \text{ cm}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo AHC si ha:

$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2} \text{ cm} = \sqrt{144 - \frac{1296}{25}} \text{ cm} = \sqrt{\frac{2304}{25}} \text{ cm} = \frac{48}{5} \text{ cm}.$$

Inoltre i triangoli ABC e HCH sono simili. Infatti:

L'angolo \hat{C} è in comune

$\hat{A} \cong \hat{H}KC$ perché entrambi retti.

Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$$\overline{HK} : \overline{AB} = \overline{HC} : \overline{BC} ;$$

$$\overline{HK} : 9 = \frac{48}{5} : 15 ; \quad \overline{HK} = \frac{9 \cdot \frac{48}{5}}{15} \text{ cm} = 9 \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{15} \text{ cm} = \frac{144}{25} \text{ cm}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo AHK si ha:

$$\overline{AK} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{5}\right)^2 - \left(\frac{144}{25}\right)^2} \text{ cm} = \sqrt{\frac{1296}{25} - \frac{20736}{625}} \text{ cm} = \sqrt{\frac{32400 - 20736}{625}} \text{ cm} = \sqrt{\frac{11664}{625}} \text{ cm} = \frac{108}{25} \text{ cm}$$

La misura del perimetro del triangolo AHK è:

$$2p_{AHK} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{AK} = \left(\frac{36}{5} + \frac{144}{25} + \frac{108}{25}\right) \text{ cm} = \frac{180 + 144 + 108}{25} \text{ cm} = \frac{432}{25} \text{ cm}.$$

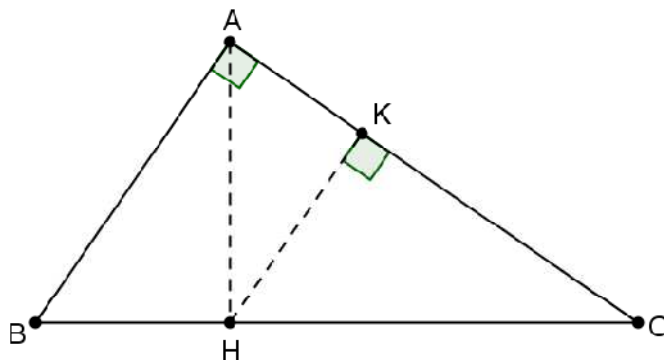
Soluzione 2

Dopo aver determinato le misure dell'ipotenusa BC e dell'altezza relativa all'ipotenusa AH , si sfrutta la similitudine dei triangoli ABC e AHK :

$$\overline{AH} : \overline{BC} = \overline{HK} : \overline{AC} ;$$

$$\frac{36}{5} : 15 = \overline{HK} : 12 ; \quad \overline{HK} = 12 \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{1}{15} \text{ cm} = \frac{144}{25} \text{ cm}$$

Si calcola in seguito, con il T. di Pitagora, la misura di \overline{AK} .



In un triangolo rettangolo ABC , di cateti 16 cm e 12 cm , traccia l'altezza CH relativa all'ipotenusa AB e la bisettrice CK dell'angolo retto. Calcola l'area del triangolo CHK .

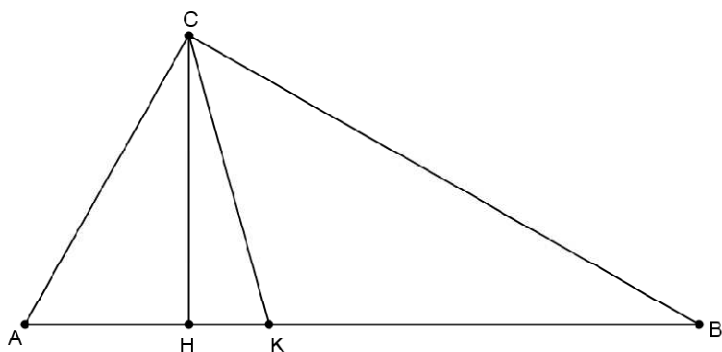
Soluzione

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2}\text{ cm} = \sqrt{400}\text{ cm} = 20\text{ cm}$$

L'area del triangolo ABC vale:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16\right)\text{ cm}^2 = 96\text{ cm}^2.$$



L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 96}{20}\text{ cm} = \frac{48}{5}\text{ cm}.$$

Ricordando il T. della bisettrice:

“La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri due lati”,

si ottiene:

$$\overline{AK} : \overline{KB} = \overline{AC} : \overline{BC} \qquad \overline{AK} : \overline{KB} = 12 : 16;$$

$$\text{Ponendo } \overline{AK} = x \qquad \Rightarrow \qquad x : \overline{KB} = 12 : 16; \qquad \overline{KB} = \frac{16x}{12} = \frac{4}{3}x.$$

Considerando che: $\overline{AK} + \overline{KB} = 20$ si ha:

$$x + \frac{4}{3}x = 20; \qquad 3x + 4x = 60; \qquad 7x = 60; \qquad x = \frac{60}{7}$$

$$\text{Pertanto } \overline{AK} = \frac{60}{7}\text{ cm} \text{ e } \overline{KB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{60}{7} = \frac{80}{7}\text{ cm}.$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo AHC si ha:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{48}{5}\right)^2}\text{ cm} = \sqrt{144 - \frac{2304}{25}}\text{ cm} = \sqrt{\frac{1296}{25}}\text{ cm} = \frac{36}{5}\text{ cm}.$$

$$\text{Si ricava quindi: } \overline{HK} = \overline{AK} - \overline{AH} = \left(\frac{60}{7} - \frac{36}{5}\right)\text{ cm} = \frac{300-252}{35} = \frac{48}{35}\text{ cm}.$$

In definitiva l'area vale:

$$S_{CHK} = \frac{1}{2}\overline{HK} \cdot \overline{CH} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{48}{35} \cdot \frac{48}{5}\right)\text{ cm}^2 = \frac{1152}{175}\text{ cm}^2$$

Un rettangolo di perimetro 28 cm è inscritto in un triangolo di base $\overline{AB} = 16 \text{ cm}$ e altezza $\overline{CH} = 12 \text{ cm}$.
 Calcola le dimensioni del rettangolo.

Soluzione

I triangoli ABC e CDE sono simili. Infatti:

L'angolo \hat{C} è in comune

$\hat{A} \cong \hat{CDE}$ perché corrispondenti

$\hat{B} \cong \hat{DEC}$ perché corrispondenti

Ricordando il teorema:

“In due triangoli simili le basi sono proporzionali alle rispettive altezze”

si ha:

$$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CH} : \overline{CK}$$

Ponendo $\overline{DG} = x \Rightarrow \overline{CK} = \overline{CH} - \overline{DG} = 12 - x \quad \overline{DE} = 14 - x$

$$16 : (14 - x) = 12 : (12 - x);$$

$$12 \cdot (14 - x) = 16 \cdot (12 - x);$$

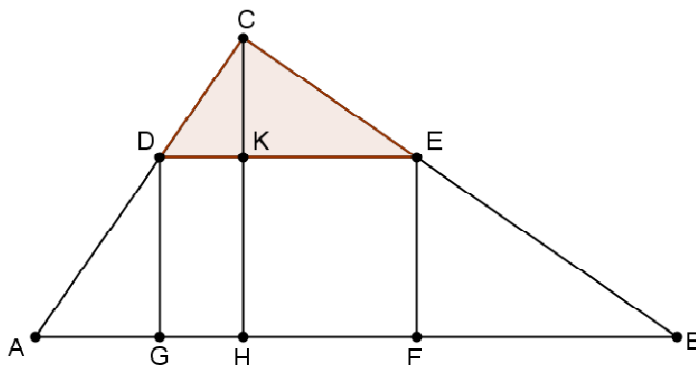
$$168 - 12x = 192 - 16x;$$

$$-12x + 16x = 192 - 168;$$

$$4x = 24;$$

$$x = 6.$$

Pertanto $\overline{DG} = 6 \text{ cm}$ è $\overline{DE} = 8 \text{ cm}$.



In una circonferenza di centro O inscrivi un triangolo isoscele avente la base di 16 cm e i lati obliqui di 20 cm ciascuno. Calcola la misura del raggio.

Soluzione 1

$$\overline{BH} = \frac{\overline{AB}}{2} = 8\text{ cm}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{20^2 - 8^2}\text{ cm} = \sqrt{336}\text{ cm} = 4\sqrt{21}\text{ cm}$$

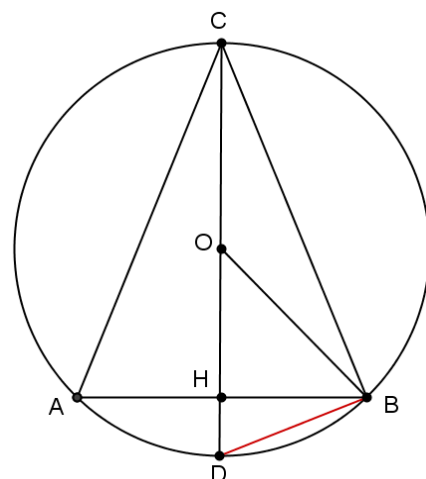
Applicando il I.T. di Euclide al triangolo BCD si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CD} ; \quad 20^2 = 4\sqrt{21} \cdot \overline{CD} ;$$

$$\overline{CD} = \frac{400}{4\sqrt{21}} = \frac{100}{\sqrt{21}} = \frac{100}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{100\sqrt{21}}{21} .$$

Pertanto il raggio misura:

$$r = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{50\sqrt{21}}{21}\text{ cm} .$$



Soluzione 2

Applicando il T. delle corde si ha:

$$\overline{CH} : \overline{AH} = \overline{HB} : \overline{HD} ; \quad 4\sqrt{21} : 8 = 8 : \overline{HD}$$

$$\overline{HD} = \frac{8 \cdot 8}{4\sqrt{21}}\text{ cm} = \frac{16}{\sqrt{21}}\text{ cm} = \frac{16}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}}\text{ cm} = \frac{16\sqrt{21}}{21}\text{ cm}$$

Pertanto:

$$r = \frac{\overline{CH} + \overline{HD}}{2} = \frac{4\sqrt{21} + \frac{16\sqrt{21}}{21}}{2}\text{ cm} = \frac{84\sqrt{21} + 16\sqrt{21}}{2 \cdot 21}\text{ cm} = \frac{100\sqrt{21}}{21}\text{ cm} = \frac{50\sqrt{21}}{21}\text{ cm} .$$

Problema 206.116

Due corde AB e CD di una circonferenza di raggio 10 cm si intersecano in un punto P interno a essa. Sapendo che $\overline{AB} = 7\text{ cm}$ e le parti in cui è divisa CD sono lunghe 6 cm e 2 cm, determina le lunghezze delle parti in cui è divisa la corda AB.

Soluzione

Ponendo $\overline{AP} = x \Rightarrow \overline{BP} = 7 - x$

Applicando il teorema delle corde si ha:

$$CP : AP = BP : DP$$

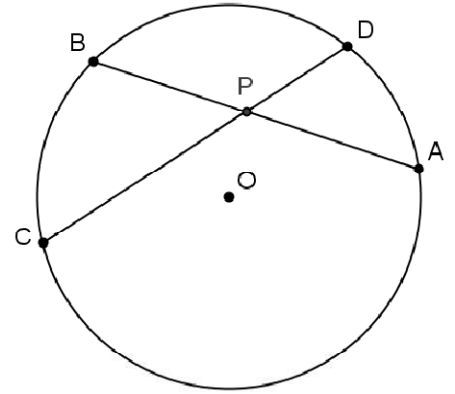
$$6 : x = (7 - x) : 2 ;$$

$$x \cdot (7 - x) = 6 \cdot 2 ;$$

$$7x - x^2 = 12 ;$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 ;$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned} \quad \text{Pertanto } \overline{AP} = 3 \text{ cm e } \overline{BP} = 4 \text{ cm} .$$



Problema 206.117

Da un punto P esterno a una circonferenza e distante 20 cm dal centro O di essa, conduci una tangente lunga 12 cm. Determina la lunghezza del raggio.

Soluzione 1

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BPO si ha:

$$\begin{aligned} r = \overline{BO} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} \text{ cm} = \\ &= \sqrt{400 - 144} \text{ cm} = \sqrt{256} \text{ cm} = 16 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Soluzione 2

Ponendo $\overline{OC} = x \Rightarrow \overline{PC} = 20 - x$ e $\overline{PD} = 20 + x$

Applicando il T. della tangente si ha:

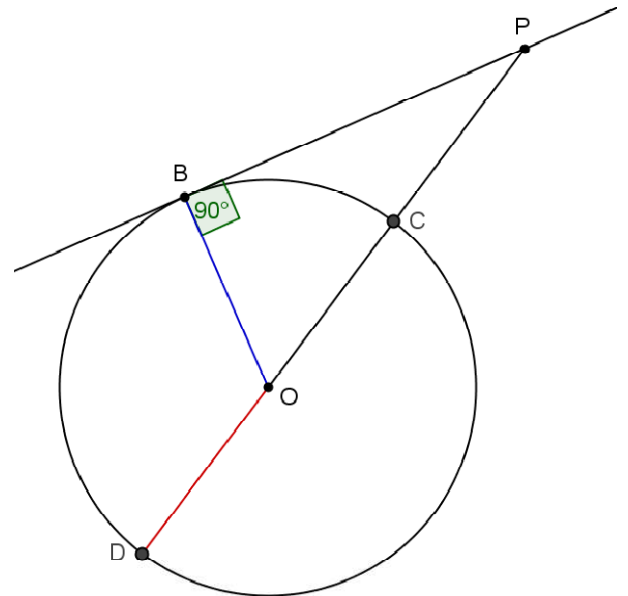
$$\overline{PD} : \overline{BP} = \overline{BP} : \overline{PC} ;$$

$$(20 + x) : 12 = 12 : (20 - x)$$

$$(20 + x) \cdot (20 - x) = 12 \cdot 12 ;$$

$$400 - x^2 = 144 ; \quad x^2 = 256 ; \quad x = \mp\sqrt{256} = \mp 16 .$$

Scartando la soluzione negativa si ha: $r = \overline{OC} = 16 \text{ cm} .$



L'area di un triangolo rettangolo è 80 cm^2 e l'ipotenusa è lunga 20 cm . Calcola la misura dei cateti.

Soluzione 1

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2 S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 80}{20} \text{ cm} = 8 \text{ cm} .$$

I triangoli ACH e BCH sono simili. Infatti:

$$\widehat{AHC} \cong \widehat{BHC} \cong 90^\circ .$$

$$\widehat{ACH} \cong 90^\circ - \widehat{HCB} \cong \widehat{B}$$

Pertanto i lati corrispondenti sono proporzionali:

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{HB}$$

Ponendo $\overline{AH} = x$ e $\overline{HB} = 20 - x$ si ottiene:

$$\begin{aligned} x : 8 &= 8 : (20 - x); & x \cdot (20 - x) &= 8 \cdot 8; & 20x - x^2 &= 64; \\ x^2 - 20x + 64 &= 0; & \frac{\Delta}{4} &= 10^2 - 64 = 36; & x_{1,2} &= 10 \mp 6 = \\ & & & & x_1 &= 4 \\ & & & & x_2 &= 16 \end{aligned}$$

Pertanto $\overline{AH} = 4 \text{ cm}$ e $\overline{HB} = 16 \text{ cm}$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 16} \text{ cm} = \sqrt{80} \text{ cm} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 256} \text{ cm} = \sqrt{320} \text{ cm} = 8\sqrt{5} \text{ cm}$$

Soluzione 2

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2 S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 80}{20} \text{ cm} = 8 \text{ cm} .$$

Ponendo $\overline{AH} = x \Rightarrow \overline{HB} = 20 - x$

Applicando il II T. di Euclide al triangolo ABC si ha:

$$\begin{aligned} \overline{CH}^2 &= \overline{AH} \cdot \overline{HB}; & 8^2 &= x \cdot (20 - x); & 64 &= 20x - x^2; \\ x^2 - 20x + 64 &= 0; & \frac{\Delta}{4} &= 10^2 - 64 = 36; & x_{1,2} &= 10 \mp 6 = \\ & & & & x_1 &= 4 \\ & & & & x_2 &= 16 \end{aligned}$$

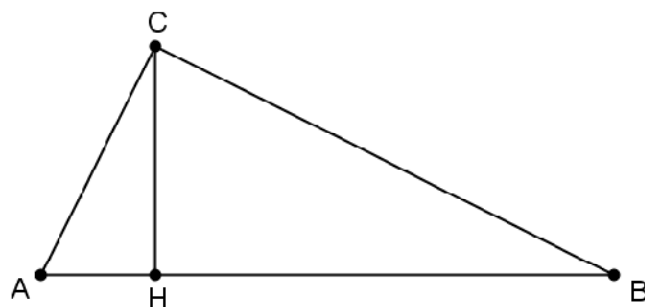
Pertanto $\overline{AH} = 4 \text{ cm}$ e $\overline{HB} = 16 \text{ cm}$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 16} \text{ cm} = \sqrt{80} \text{ cm} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

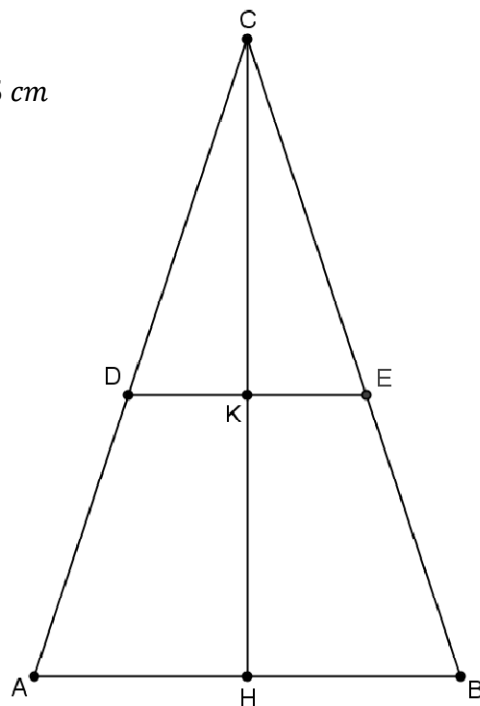
Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} \text{ cm} = \sqrt{64 + 256} \text{ cm} = \sqrt{320} \text{ cm} = 8\sqrt{5} \text{ cm}$$



Problema 215.180

Nel triangolo isoscele raffigurato a lato, $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 15 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$ e $DE \parallel AB$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo CLM.



Soluzione

Il perimetro del triangolo ABC misura:

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (10 + 15 + 15) \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{225 - 25} \text{ cm} = \sqrt{200} \text{ cm} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

L'area de triangolo ABC vale:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \left(\frac{1}{2} 10 \cdot 10\sqrt{2} \right) \text{ cm}^2 = 50\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

I triangoli ABC e BCH sono simili. Infatti:

\hat{C} è in comune

$\hat{CDE} \cong \hat{A}$ perché angoli corrispondenti fra $DE \parallel AB$ tagliate da AC

$\hat{CED} \cong \hat{B}$ perché angoli corrispondenti fra $DE \parallel AB$ tagliate da BC

Ricordando il teorema:

“Il rapporto fra i perimetri di due triangoli simili è uguale al rapporto fra le misure dei lati corrispondenti”,

si ottiene:

$$2p_{ABC} : 2p_{CDE} = \overline{AC} : \overline{CD} ; \quad 40 : 2p_{CDE} = 15 : 5 \quad 2p_{CDE} = \frac{40 \cdot 5}{15} \text{ cm} = \frac{40}{3} \text{ cm} .$$

Ricordando il teorema:

“Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure dei lati corrispondenti”, si ha:

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{AC}^2} ; \quad \frac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \frac{5^2}{15^2} ; \quad \frac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \frac{25}{225} ; \quad \frac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \frac{1}{9} ;$$

$$S_{CDE} = \frac{50}{9} \sqrt{2} \text{ cm}^2 .$$

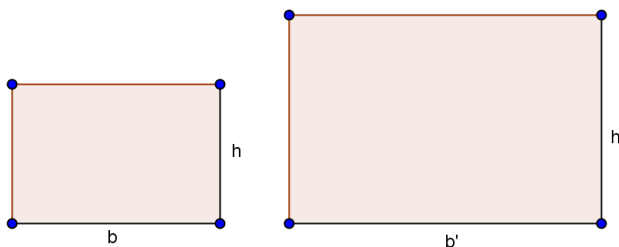
Problema 215.181

Un rettangolo il cui perimetro è $15a$ è simile a un altro rettangolo la cui base è $8a$ e la cui altezza è $2a$. Calcola la misura dei lati e l'area del primo rettangolo.

Soluzione

Il perimetro del rettangolo R^I è

$$p_{R^I} = 2 \cdot (8a + 2a) = 20a$$



Essendo i due rettangoli R e R^I simili, si ha che i perimetri sono proporzionali ai lati corrispondenti:

$$p_R : p_{R^I} = b : b^I$$

$$15a : 20a = b : 8a \quad \text{da cui si ottiene: } b = \frac{15a \cdot 8a}{20a} = 6a .$$

$$\text{L'altezza } h = \frac{15}{2}a - 6a = \frac{3}{2}a . \quad \text{L'area del rettangolo } R \text{ è: } S = b \cdot h = 6a \cdot \frac{3}{2}a = 9a^2 .$$

Il lato AB di un triangolo ABC misura a. Conduci da un punto P di AB la parallela PQ a un altro lato in modo che il triangolo risulti suddiviso in due poligoni equivalenti.

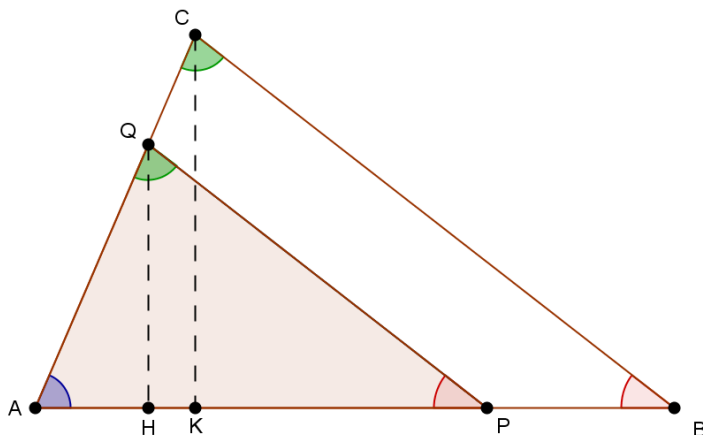
Soluzione 1

Poniamo $\overline{AP} = x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < a$

I due triangoli APQ e ABC sono simili perché:

- ✚ l'angolo \hat{A} è in comune
- ✚ $\hat{AQP} \cong \hat{ACB}$ (angoli corrispondenti)
- ✚ $\hat{APQ} \cong \hat{ABC}$ (angoli corrispondenti)



Pertanto i due triangoli APQ e ABC hanno i lati proporzionali alle altezze corrispondenti:

$$\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{QH} : \overline{CK} \quad x : a = \overline{QH} : \overline{CK} ; \quad \text{da cui si ottiene: } \overline{QH} = \frac{x}{a} \overline{CK}$$

L'equivalenza fra il triangolo APQ e il trapezio $BCQP$	\Leftrightarrow	l'area del triangolo ABC è il doppio dell'area del triangolo APQ
---	-------------------	--

In simboli: $(APQ \cong BCQP) \Leftrightarrow (ABC \cong 2 \cdot APQ) \Leftrightarrow S_{ABC} = 2 \cdot S_{APQ}$

Sostituendo i dati conosciuti si ha:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CK}}{2} = 2 \cdot \frac{\overline{AP} \cdot \overline{QH}}{2} ; \quad \overline{AB} \cdot \overline{CK} = 2 \cdot (\overline{AP} \cdot \overline{QH}) ;$$

$$a \cdot \overline{CK} = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{a} \overline{CK} ; \quad \text{dividendo per } \overline{CK} \neq 0 \quad \text{si ottiene:}$$

$$a = 2 \cdot \frac{x^2}{a} ; \quad a^2 = 2x^2 ; \quad x^2 = \frac{a^2}{2} ;$$

$$x = \mp \sqrt{\frac{1}{2} a^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} a = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} a = \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} a & \text{non accettabile} \\ x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2} a & \text{accettabile} \end{cases}$$

Soluzione 2

Ricordando il teorema:

“Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure dei lati corrispondenti”, si ha:

$$\overline{AB}^2 : \overline{AP}^2 = S_{ABC} : S_{APQ} ; \quad a^2 : x^2 = 2 S_{APQ} : S_{APQ} ;$$

$$x^2 = \frac{a^2 \cdot S_{APQ}}{2 S_{APQ}} ; \quad x^2 = \frac{1}{2} a^2 ;$$

$$x = \mp \sqrt{\frac{1}{2} a^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} a = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} a = \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} a & \text{non accettabile} \\ x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2} a & \text{accettabile} \end{cases}$$

Considera una circonferenza avente il raggio di 3 cm e circoscrivi a essa un triangolo isoscele ABC sulla base AB . Il rapporto tra l'altezza CH e la base è $\frac{6}{5}$. Determina le lunghezze dei lati del triangolo.

Soluzione

Poniamo $\overline{HB} = x \Rightarrow \overline{AB} = 2x$

$$\overline{CH} = \frac{6}{5}2x = \frac{12}{5}x$$

$$\overline{CO} = \frac{12}{5}x - 3$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\frac{144}{25}x^2 + x^2} = \sqrt{\frac{169}{25}x^2} = \frac{13}{5}x.$$

Dalla similitudine dei triangoli COD e CBH si ottiene:

$$\overline{CO} : \overline{CB} = \overline{OD} : \overline{HB}; \quad \left(\frac{12}{5}x - 3\right) : \frac{13}{5}x = 3 : x$$

$$\frac{39}{5}x = x \cdot \left(\frac{12}{5}x - 3\right); \quad \frac{39}{5}x = \frac{12}{5}x^2 - 3x;$$

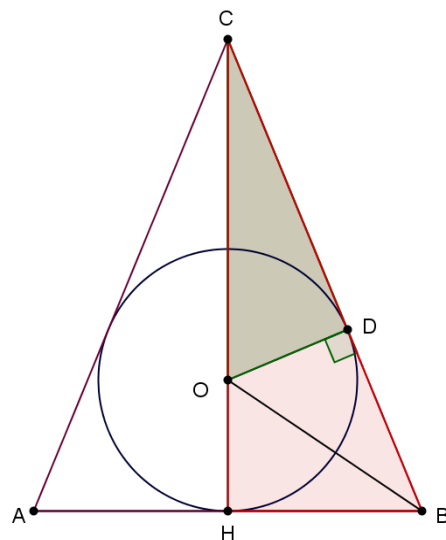
$$12x^2 - 54x = 0;$$

$$2x^2 - 9x = 0; \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{9}{2} \end{matrix}$$

Pertanto:

$$\overline{AB} = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9\text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \frac{13}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{117}{10} = 11,7\text{ cm}.$$



É dato un triangolo rettangolo ABC il cui cateto AB è 12 cm . Si sa, inoltre, che il cateto AC è $\frac{3}{4}$ di AB . Determina su AB un punto P in modo tale che, detta Q la sua proiezione ortogonale su BC , sussista la relazione: $\overline{PC}^2 + 2\overline{PQ}^2 = 40\overline{AP}^2 - 3$.

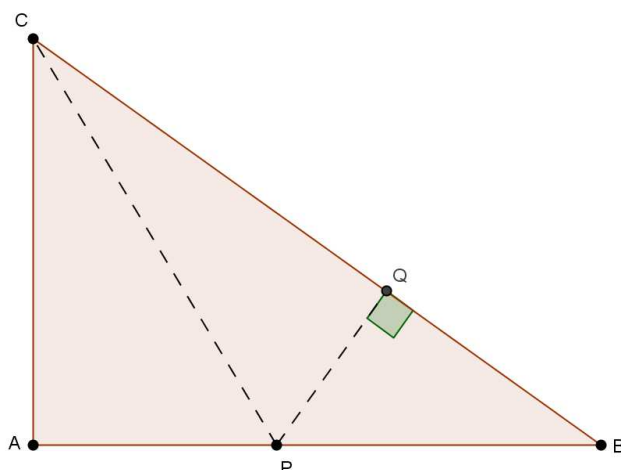
Soluzione

Calcoliamo innanzitutto le misure degli altri due lati:

$$\overline{AC} = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9\text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15\text{ cm}$$

Indicando: $\overline{AP} = x \Rightarrow \overline{PB} = 12 - x$ con i vincoli geometrici $0 < x < 12$.



Dalla similitudine dei due triangoli ABC e PBQ (l'angolo \hat{B} in comune e $\hat{A} = \hat{PQB} = 90^\circ$) si ottiene:

$$\overline{PQ} : \overline{AC} = \overline{PB} : \overline{CB}; \quad \overline{PQ} : 9 = (12 - x) : 15; \quad \overline{PQ} = \frac{9 \cdot (12 - x)}{15} = \frac{3}{5}(12 - x).$$

Mentre

$$\overline{QB} : \overline{AB} = \overline{PB} : \overline{CB}; \quad \overline{QB} : 12 = (12 - x) : 15; \quad \overline{QB} = \frac{12 \cdot (12 - x)}{15} = \frac{4}{5}(12 - x).$$

Pertanto:

$$\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{QB} = 15 - \frac{4}{5}(12 - x) = \frac{75 - 48 + 4x}{5} = \frac{27 + 4x}{5}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo CPQ si ricava:

$$\begin{aligned} \overline{PC}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = \left[\frac{3}{5}(12 - x) \right]^2 + \left(\frac{27 + 4x}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}(144 + x^2 - 24x) + \frac{729 + 16x^2 + 216x}{25} = \\ &= \frac{1296 + 9x^2 - 216x + 729 + 16x^2 + 216x}{25} = \frac{2025 + 25x^2}{25} = 81 + x^2. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella relazione: $\overline{PC}^2 + 2\overline{PQ}^2 = 40\overline{AP}^2 - 3$ si ottiene:

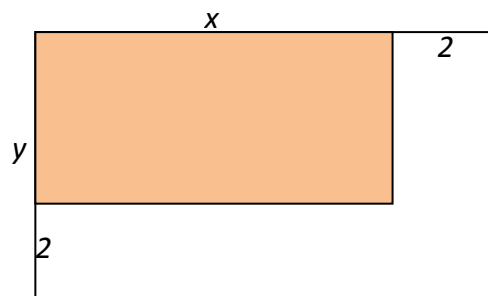
$$81 + x^2 + 2 \cdot \frac{9}{25}(144 + x^2 - 24x) = 40x^2 - 3;$$

Da cui si ricavano le radici: $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{782}{319}$.

Di queste radici soltanto quella positiva è accettabile.

Pertanto il punto P si trova a 2 cm dal vertice A.

Un rettangolo ha la superficie di 80 cm^2 . Se si aumentano le sue dimensioni ciascuna di 2 cm , l'area aumenta di 46 cm^2 . Calcola la misura delle dimensioni.



Soluzione

Ponendo le dimensioni del rettangolo uguali a x e y .

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 80 \\ (x + 2)(y + 2) = 80 + 46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ xy + 2x + 2y + 4 = 126 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ xy + 2x + 2y = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ x \cdot \frac{80}{x} + 2x + 2 \cdot \frac{80}{x} = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ 80 + 2x + \frac{160}{x} - 122 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ 80x + 2x^2 + 160 - 122x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ 2x^2 - 42x + 160 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ x^2 - 21x + 80 = 0 \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$x_{1,2} = \frac{21 \mp \sqrt{441 - 320}}{2} = \frac{21 \mp 11}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 16 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Le dimensioni del rettangolo sono pertanto: $b = 16 \text{ cm}$ e $h = 5 \text{ cm}$.

Stabilisci se si può inscrivere un trapezio isoscele che ha il perimetro di 20 cm in una semicirconferenza di raggio 5 cm .

Soluzione

La base del trapezio deve coincidere con il diametro.
 Pertanto $\overline{AB} = 10\text{ cm}$.

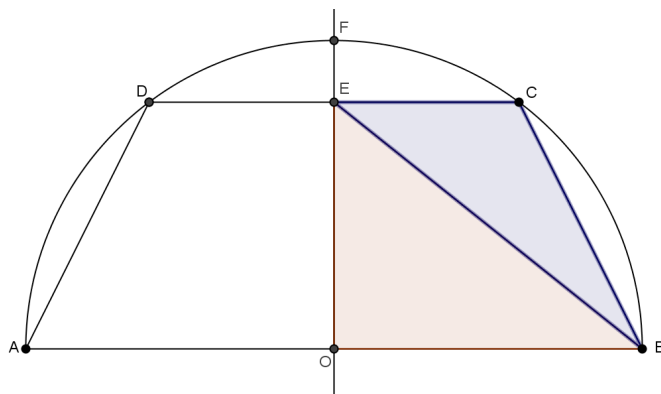
Quindi: $\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CD} = 10\text{ cm}$.

Cioè: $\overline{EC} + \overline{CB} = 5\text{ cm}$. Ma ciò non può sussistere.

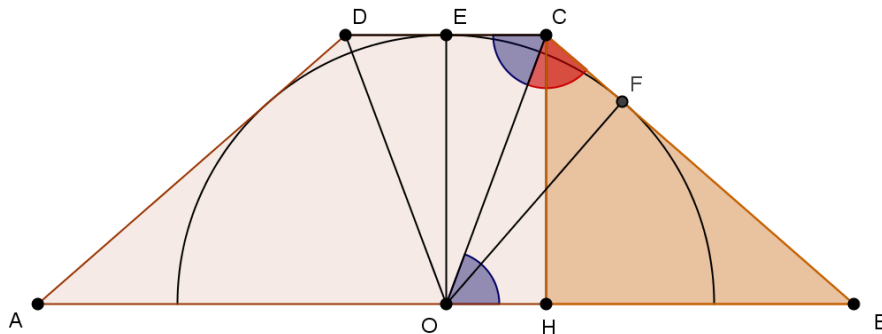
Infatti, ricordando che:

- ✘ la somma di due qualsiasi lati di un triangolo è maggiore del terzo
- ✘ in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno cateto

si ha che: $\overline{EC} + \overline{CB} > \overline{EB} > \overline{OB} = 5$.



Un trapezio isoscele è circoscritto a un semicerchio di raggio r . Sapendo che la base minore è parallela al diametro ed è lunga $\frac{3}{4}r$, determina il perimetro e l'area del trapezio.



Soluzione

Essendo $\overline{DC} = \frac{3}{4}r \Rightarrow \overline{EC} = \frac{3}{8}r$ e $\overline{OH} = \frac{3}{8}r$

$B\hat{O}C \cong O\hat{C}E$ perché alterni interni

$\Rightarrow B\hat{O}C \cong O\hat{C}F$

$O\hat{C}E \cong O\hat{C}F$ perché CE e CF sono tangenti alla circonferenza.

Il che dimostra che il triangolo OBC è isoscele con $OB \cong BC$.

Poniamo $\overline{OB} = x \Rightarrow \overline{HB} = x - \frac{3}{8}r$

Con i limiti geometrici: $x > r$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{BC}^2$;

$r^2 + \left(x - \frac{3}{8}r\right)^2 = x^2$; $r^2 + x^2 + \frac{9}{64}r^2 - \frac{3}{4}rx = x^2$; $\frac{73}{64}r^2 - \frac{3}{4}rx = 0$;

$\frac{3}{4}rx = \frac{73}{64}r^2$; $x = \frac{73}{64}r^2 \cdot \frac{4}{3r}$; $x = \frac{73}{48}r$

Pertanto $\overline{BC} = \frac{73}{48}r$ e $\overline{AB} = 2 \cdot \frac{73}{48}r = \frac{73}{24}r$

In definitiva il perimetro del trapezio è:

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \frac{73}{24}r + \frac{73}{48}r + \frac{3}{4}r + \frac{73}{48}r = \frac{328}{48}r = \frac{41}{6}r$.

Mentre l'area è:

$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{73}{24}r + \frac{3}{4}r\right) \cdot r = \frac{91}{48}r^2$.

Problema 215.196

Disegna un arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O il cui raggio 5 cm . Fissa su AB un punto P e indica con H la sua proiezione sul lato OB . Determina la misura di PH in modo che: $\overline{AP} + 2\overline{PH} = 11$.

Soluzione

Poniamo $\overline{PH} = x \Rightarrow \overline{PA} = 11 - 2x$ e $\overline{KA} = 5 - x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < 5$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo OPH si ha:

$$\overline{OH} = \sqrt{25 - x^2}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo PAK si ha:

$$\overline{KA}^2 + \overline{PK}^2 = \overline{PA}^2;$$

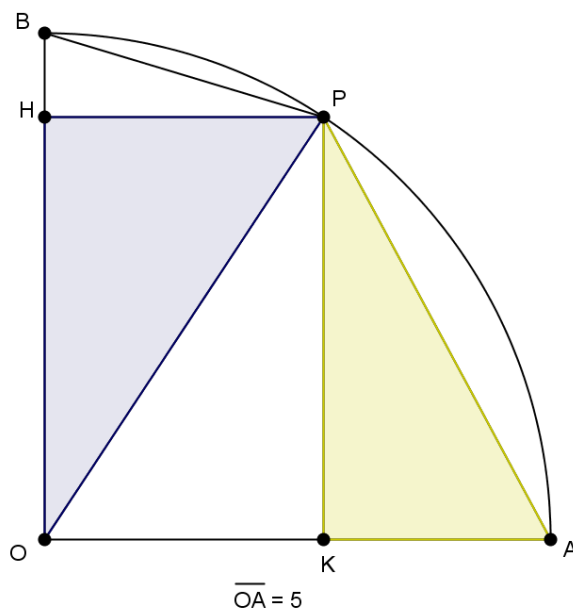
$$(5 - x)^2 + (\sqrt{25 - x^2})^2 = (11 - 2x)^2;$$

$$25 + x^2 - 10x + 25 - x^2 = 121 + 4x^2 - 44x;$$

$$4x^2 - 34x + 71 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{17 \mp \sqrt{289 - 284}}{4} = \frac{17 \mp \sqrt{5}}{4}.$$

Soluzioni entrambe accettabili, perché rispettano i limiti geometrici.



Problema 215.198

Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 20\text{ cm}$, individua un punto P in modo tale che $2\overline{AP} = 3\overline{PB}$.

Soluzione

Poniamo $\overline{AP} = x \Rightarrow \overline{PB} = \frac{3}{2}x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < 20$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABP si ha:

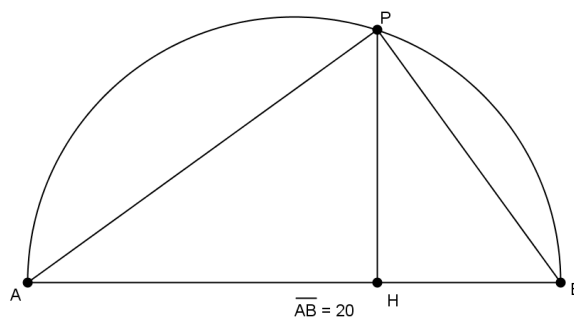
$$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 400; \quad 4x^2 + 9x^2 = 1600; \quad 13x^2 = 1600; \quad x^2 = \frac{1600}{13}; \quad x = \mp \frac{40}{13}\sqrt{13}$$

Soltanto la soluzione positiva è accettabile. Pertanto $\overline{AP} = \frac{40}{13}\sqrt{13}\text{ cm}$.

Applicando il 1° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABP si ha: $\overline{AP}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$

$$\text{Da cui si ottiene: } \overline{AH} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AB}} = \frac{1600}{13} \cdot \frac{1}{20} = \frac{80}{13}.$$



Il raggio di una circonferenza di centro O è 10 cm . Conduci una corda AB e indica con H il piede della perpendicolare condotta da O ad AB . Trova a quale distanza dal centro O si deve tracciare la corda affinché sussista la relazione $\overline{AB} + \overline{OH} = 22\text{ cm}$.

Soluzione

Poniamo $\overline{OH} = x$ con i limiti geometrici: $0 < x < 10$.

$$\overline{AH} = \sqrt{100 - x^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2\sqrt{100 - x^2}$$

Sostituendo nella relazione $\overline{AB} + \overline{OH} = 22\text{ cm}$ si ottiene:

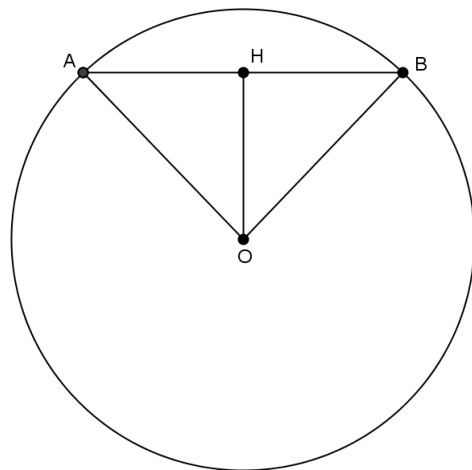
$$2\sqrt{100 - x^2} + x = 22; \quad 2\sqrt{100 - x^2} = 22 - x$$

$$4(100 - x^2) = 484 + x^2 - 44x;$$

$$400 - 4x^2 - 484 - x^2 + 44x = 0;$$

$$5x^2 - 44x + 84 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \mp \sqrt{484 - 420}}{5} = \frac{22 \mp \sqrt{64}}{5} = \frac{22 \mp 8}{5} = \begin{matrix} x_1 = \frac{14}{5} \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$



Considera un segmento AB lungo 9 cm . Tra gli estremi A e B prendi un punto P e costruisci, dalla stessa parte, i due triangoli equilateri APC e PBD . Calcola quale distanza deve avere P da A affinché risulti: $S_{CPD} = \frac{1}{2}S_{PBD}$.

Soluzione

Poniamo $\overline{AP} = x$ con i limiti geometrici: $0 < x < 9$.

$$\overline{PB} = 9 - x \quad \overline{PH} = \frac{x}{2} \quad \overline{PK} = \frac{9 - x}{2}$$

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \overline{DK} = \frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x)$$

Sostituendo nella relazione: $S_{CPD} = \frac{1}{2}S_{PBD}$ si ottiene:

$$S_{CDKH} - S_{PCH} - S_{PDK} = \frac{1}{2}S_{PBD}$$

$$\frac{1}{2}(\overline{DK} + \overline{CH}) \cdot \overline{HK} - \frac{1}{2}\overline{PH} \cdot \overline{CH} - \frac{1}{2}\overline{PK} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{DK};$$

$$(\overline{DK} + \overline{CH}) \cdot \overline{HK} - \overline{PH} \cdot \overline{CH} - \overline{PK} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{DK};$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x) + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{9 - x}{2}\right) - \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{9 - x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x) = \frac{1}{2}(9 - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x);$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(9 - x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(9 - x)^2;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(9 - x)^2 = 0;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(81 + x^2 - 18x) = 0;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{81\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 9\sqrt{3}x = 0;$$

$$81\sqrt{3} - \sqrt{3}x^2 - 162\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x^2 + 36\sqrt{3}x = 0;$$

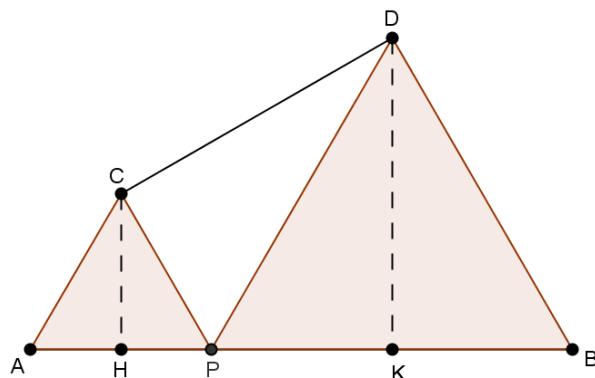
$$-3\sqrt{3}x^2 + 36\sqrt{3}x - 81\sqrt{3} = 0;$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0;$$

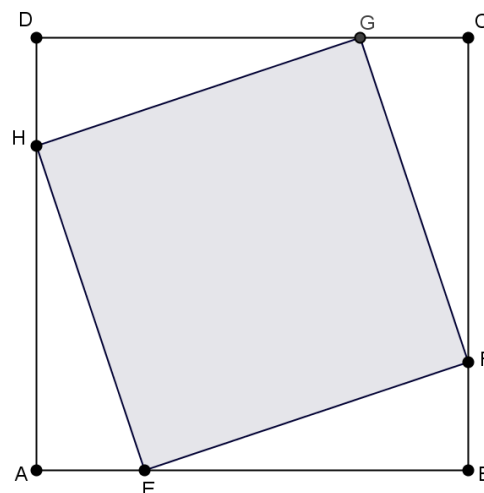
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{6 \mp \sqrt{36 - 27}}{1} = 6 \mp 3 = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{matrix}$$

Soltanto la soluzione positiva: $x = 3$ è accettabile.

Pertanto $\overline{AP} = 3$.



Un quadrato $ABCD$ ha l'area di $75a^2$. Inscrivi in esso un altro quadrato $EFGH$ la cui area sia $39a^2$. Calcola le lunghezze di AE e di EB .



Soluzione

$$S_{ABCD} = 75a^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 5\sqrt{3}a$$

$$S_{EFGH} = 39a^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{EF} = \sqrt{39}a$$

$$\text{Poniamo } \overline{AE} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{EB} = 5\sqrt{3}a - x$$

con i limiti geometrici: $0 < x < 5\sqrt{3}a$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo EBF si ha:

$$\overline{EB}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{EF}^2$$

$$(5\sqrt{3}a - x)^2 + x^2 = (\sqrt{39}a)^2; \quad 75a^2 + x^2 - 10\sqrt{3}ax + x^2 = 39a^2;$$

$$2x^2 - 10\sqrt{3}ax + 36a^2 = 0; \quad x^2 - 5\sqrt{3}ax + 18a^2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5\sqrt{3}a \mp \sqrt{75a^2 - 72a^2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}a \mp \sqrt{3}a}{2} = \begin{matrix} x_1 = 2\sqrt{3}a \\ x_2 = 3\sqrt{3}a \end{matrix}$$

Soluzioni entrambe accettabili.

Un trapezio isoscele che ha la base maggiore di 28 cm, la minore di 10 cm e l'altezza di 12 cm, si deve suddividere, mediante una parallela alle basi, in due trapezi aventi l'area uguale. Trova a quale distanza dalla base minore si deve tracciare la parallela.

Soluzione

$$S_{ABCD} = \frac{10+28}{2} \cdot 12 = 228 \text{ cm}^2 \Rightarrow S_{DCEF} = 114 \text{ cm}^2$$

Poniamo $\overline{DK} = x$

con i limiti geometrici: $0 < x < 12$.

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} = 9 \text{ cm}$$

Dalla similitudine dei triangoli ADH e DEK si ha: $\overline{EK} : \overline{AH} = \overline{DK} : \overline{DH}$; $\overline{EK} : 9 = x : 12$

Da cui si ricava: $\overline{EK} = \frac{3}{4}x$.

Sostituendo nella relazione: $S_{DCEF} = 114 \text{ cm}^2$ si ottiene:

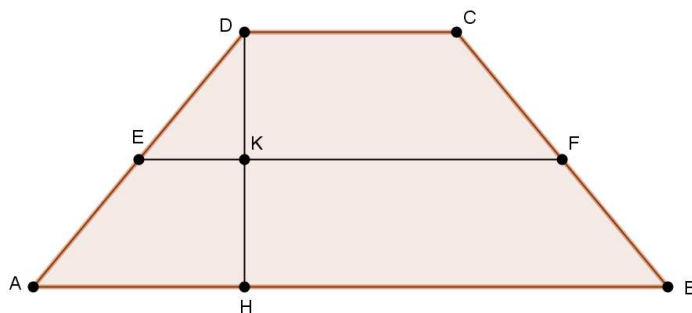
$$\frac{\overline{EF} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DK} = 114; \quad (\overline{EF} + \overline{DC}) \cdot \overline{DK} = 228; \quad \left(10 + \frac{3}{2}x + 10\right) \cdot x = 228;$$

$$20x + \frac{3}{2}x^2 = 228; \quad 3x^2 + 40x - 456 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1368}}{3} = \frac{-20 \pm \sqrt{1768}}{3} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{442}}{3}.$$

Scartando la soluzione negativa, si ha:

$$\overline{DK} = \frac{-20 + 2\sqrt{442}}{3} \text{ cm}$$



Problema 215.210

Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, trova un punto P in modo tale che, detta H la sua proiezione su AB , sia $\overline{AH} + \overline{PB} = 12 \text{ cm}$.

Soluzione

Poniamo $\overline{AH} = x$ e $\overline{PB} = y$

con i limiti geometrici: $0 < x < 10$ e $0 < y < 10$

Per il 1° T. di Euclide applicato al triangolo rettangolo ABP si ha:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y^2 = 10 \cdot (10 - x) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 - x \\ ((12 - x)^2 = 100 - 10x) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 - x \\ (144 + x^2 - 24x - 100 + 10x = 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 - x \\ x^2 - 14x + 44 = 0 \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 44}}{1} = 7 \pm \sqrt{5}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili perché entrambe positive e minori di 10.

