Prova di Matematica : Radicali + Trigonometria

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

29.11.2011
prof. Mimmo Corrado

1. Quanto vale: $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$? *(Olimpiadi della matematica 1997)*

   $\sqrt[20]{2}$ $\sqrt[9]{2}$ $\sqrt[4]{2}$ $\sqrt[20]{2^9}$ $\sqrt[20]{4}$

2. $\dfrac{1}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$ è *un numero*:

   intero *razionale negativo, ma non intero* *razionale positivo, ma non intero*
   irrazionale positivo *irrazionale negativo* *(Olimpiadi della matematica 2003)*

3. Data la seguente equazione: $4 = \sqrt{7+\sqrt{9+\sqrt{4+x}}}$ quanto vale x ? *(Olimpiadi della matematica 1997)*

   36 46 56 68 5180

4. Quale dei seguenti numeri è il più piccolo ? *(Olimpiadi della matematica 1997)*

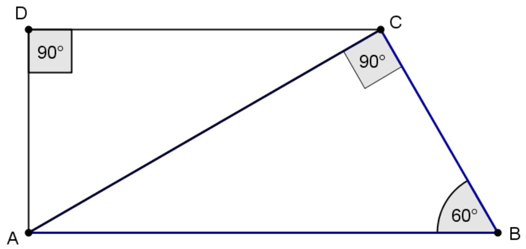
   $0{,}0000001$ $0{,}1^{0{,}1}$ $(0{,}0001)^2$ $\sqrt{0{,}00001}$ 9^{-8}

5. Scrivi i primi 5 termini delle classi contigue di numeri che hanno come elemento di separazione il numero $5-2\sqrt{3}$.

6. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $\sqrt{41}$.

7. Dimostra che $\sqrt{11}$ è un numero irrazionale.

8. Determina il perimetro del trapezio rettangolo, in figura, sapendo che l'altezza $\overline{AD} = \sqrt{3}$ e la base maggiore $\overline{AB} = 4$.



9. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left[\left(5^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt[6]{2}} \qquad \left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right) - 15\cdot\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{3(a+b)}{ab}} : \sqrt{\frac{a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}{a^2b^2}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}+\sqrt{\frac{1}{4x^2-1}}\right) : \frac{1}{\sqrt{2x-1}} - \frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$$

10. Verifica la seguente identità: $\dfrac{cos^2x}{1-cos^2x} - tgx - \dfrac{sen^2x-1}{cos^2x} - \dfrac{1}{sen^2x} = -tgx$

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti	5	5	5	5	5	5	8	12	20	10	80

Punti	*0 - 5*	*6 - 10*	*11 - 15*	*16 - 20*	*21 - 25*	*26 - 30*	*31 - 35*	*36 - 40*	*41 - 45*	*46 - 50*	*51 - 55*	*56 - 60*	*61 - 65*	*66 - 70*	*71 - 75*	*76 - 80*
Voto	*2*	*2½*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Quanto vale: $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$? *(Olimpiadi della matematica 1997)*

<u>Soluzione</u>

$$\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2^5}} = \sqrt[20]{2^5} = \sqrt[4]{2}$$

2. $\dfrac{1}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$ è un numero:

intero *razionale negativo, ma non intero* *razionale positivo, ma non intero*
irrazionale positivo *irrazionale negativo* *(Olimpiadi della matematica 2003)*

<u>Soluzione</u>

$$\frac{1}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})} \quad \text{è un numero razionale positivo, ma non intero.}$$

Infatti è uguale a:

$$= \frac{1}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{1}{(9-2)(4-3)} = \frac{1}{7 \cdot 1} = \frac{1}{7}\ .$$

3. Data la seguente equazione: $4 = \sqrt{7+\sqrt{9+\sqrt{4+x}}}$ quanto vale x ? *(Olimpiadi della matematica 1997)*

<u>Soluzione</u>

$x = 5180\,.$

Infatti:

$$4 = \sqrt{7+\sqrt{9+\sqrt{4+5180}}} \quad ;$$

$$4 = \sqrt{7+\sqrt{9+\sqrt{5184}}} \quad ;$$

$$4 = \sqrt{7+\sqrt{9+72}} \quad ;$$

$$4 = \sqrt{7+\sqrt{81}} \quad ;$$

$$4 = \sqrt{7+9} \quad ;$$

$$4 = \sqrt{16} \quad ;$$

$$4 = 4 \quad ;$$

4. Quale dei seguenti numeri è il più piccolo ? *(Olimpiadi della matematica 1997)*

$0{,}0000001$ $\qquad 0{,}1^{0{,}1}$ $\qquad (0{,}0001)^2$ $\qquad \sqrt{0{,}00001}$ $\qquad 9^{-8}$

Soluzione

$0{,}0000001 = 10^{-7}$

$0{,}1^{0{,}1} = (10^{-1})^{0{,}1} = 10^{-0{,}1}$

$(0{,}0001)^2 = (10^{-4})^2 = 10^{-8}$

$\sqrt{0{,}00001} = (10^{-5})^{\frac{1}{2}} = 10^{-\frac{5}{2}}$

Fra questi quattro numeri, il più piccolo è: 10^{-8} .

Ma fra $10^{-8} = \frac{1}{10^8}$ e $9^{-8} = \frac{1}{9^8}$, il più piccolo è quello che ha il denominatore maggiore.

Pertanto il numero più piccolo è: $(0{,}0001)^2 = (10^{-4})^2 = 10^{-8}$

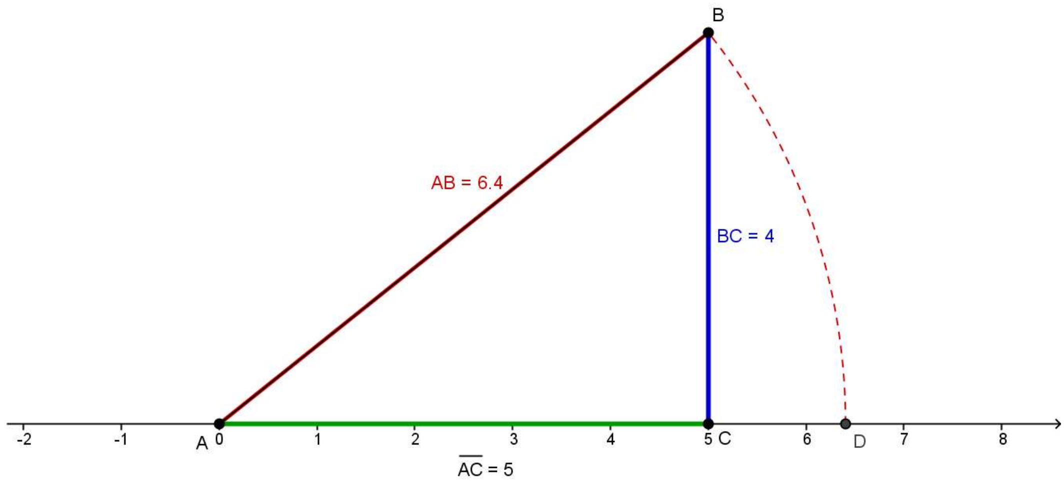
5. Scrivi i primi 5 termini delle classi contigue di numeri che hanno come elemento di separazione il numero $5 - 2\sqrt{3}$.

$5 - 2\sqrt{3} \approx 1{,}53589838 \ldots$

$D = \{1 ;\ 1{,}5 ;\ 1{,}53 ;\ 1{,}535 ;\ 1{,}5358 ; \ldots\}$

$E = \{2 ;\ 1{,}6 ;\ 1{,}54 ;\ 1{,}536 ;\ 1{,}5359 ; \ldots\}$

6. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $\sqrt{41}$.



7. Dimostra che $\sqrt{11}$ è un numero irrazionale.

<u>*Dimostrazione*</u>

$Supponiamo\ per\ assurdo\ che\ \sqrt{11}\ sia\ un\ numero\ razionale,\quad cioè\ che:\ \sqrt{11} = \frac{a}{b}\quad con\ a\ e\ b\ primi\ tra\ loro\ .$

$\frac{a}{b} = \sqrt{11} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 11 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = 11 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 11 \cdot b^2 \ \ (*) \quad \Rightarrow \quad a^2\ è\ multiplo\ di\ 11$

$Ma\ se\ a^2\ è\ multiplo\ di\ 11 \quad \Rightarrow \quad a\ è\ multiplo\ di\ 11\ .$

$Ma\ se\ a\ è\ multiplo\ di\ 11\ \ si\ puo\ scrivere\ \ a = 11 \cdot k\ \ .$

$Sostituendo\ tale\ espressione\ nell'equazione\ (*)\ si\ ottiene:$

$a^2 = 11 \cdot b^2\ ; \quad (11k)^2 = 11 \cdot b^2\ ; \quad 121k^2 = 11 \cdot b^2\ ; \quad 11k^2 = b^2$

$11k^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2\ è\ multiplo\ di\ 11\ .$

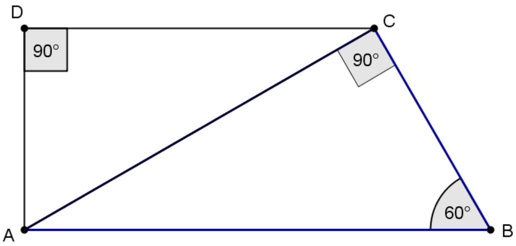
$Ma\ se\ b^2\ è\ multiplo\ di\ 11 \quad \Rightarrow \quad b\ è\ multiplo\ di\ 11\quad e\ \ si\ può\ scrivere\ \ b = 11h\ .$

$Pertanto\ si\ ottiene:\ \ \frac{a}{b} = \frac{11k}{11h} \quad ma\ ciò\ è\ un\ assurdo.$

$Infatti, per\ ipotesi\ a\ e\ b\ erano\ primi\ tra\ loro, invece\ in\ questa\ uguaglianza\ sono\ entrambi\ divisibili\ per\ 11,$

$e\ quindi\ non\ primi.$

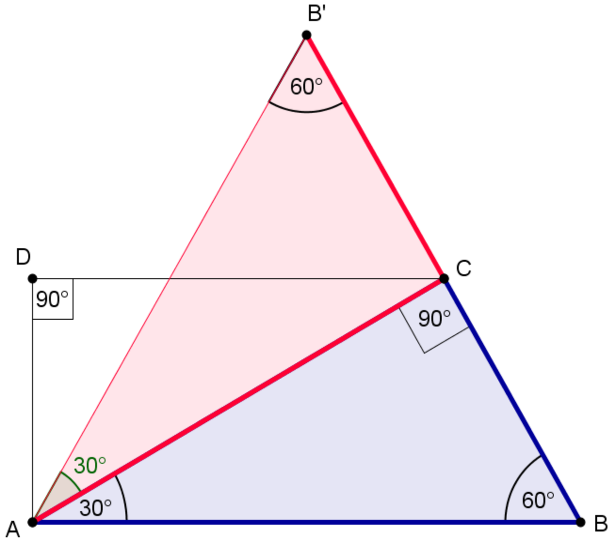
8. Determina il perimetro del trapezio rettangolo, in figura, sapendo che l'altezza $\overline{AD} = \sqrt{3}$ e la base maggiore $\overline{AB} = 4$.



<u>Soluzione 1</u>

Essendo ABC e ACD due triangoli rettangoli $\Rightarrow$ $\widehat{BAC} = 30°$, $\widehat{CAD} = 60°$ e $\widehat{ACD} = 30°$.

Pertanto il triangolo ABC e la metà del triangolo equilatero ABB'.



Da cui si ottiene:

$\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$

Quindi il perimetro del trapezio è:

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 4 + 2 + 3 + \sqrt{3} = 9 + \sqrt{3}\,.$

Soluzione 2

$sen\, \widehat{BAC} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$; $\quad sen\, 30° = \dfrac{\overline{BC}}{4}$; $\quad \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{BC}}{4}$; $\quad \overline{BC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$sen\, \widehat{ABC} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$; $\quad sen\, 60° = \dfrac{\overline{AC}}{4}$; $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\overline{AC}}{4}$; $\quad \overline{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$

$sen\, \widehat{CAD} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$; $\quad sen\, 60° = \dfrac{\overline{CD}}{2\sqrt{3}}$; $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\overline{CD}}{2\sqrt{3}}$; $\quad \overline{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$

Quindi il perimetro del trapezio è:

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 4 + 2 + 3 + \sqrt{3} = 9 + \sqrt{3}$.

9. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left[\left(5^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt[6]{2}} = 5^{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{2}} = 5^{\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2}} = 5^{\sqrt[6]{2^2\cdot 2^3\cdot 2}} = 5^{\sqrt[6]{2^6}} = 5^2 = 25$$

$$\left(4\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - 15 \cdot \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} =$$

$$= 48 + 2 + 8\sqrt{6} + 3 - 18 - 15 \cdot \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} =$$

$$= 35 + 8\sqrt{6} - 15 \cdot \frac{3 + 18 - 6\sqrt{6}}{3 - 18} =$$

$$= 35 + 8\sqrt{6} - 15 \cdot \frac{21 - 6\sqrt{6}}{-15} =$$

$$= 35 + 8\sqrt{6} + 21 - 6\sqrt{6} =$$

$$= 56 + 2\sqrt{6} \;.$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{3(a+b)}{ab}}:\sqrt{\frac{a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}{a^2b^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}{a^2b^2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{ab}}\cdot\sqrt[4]{\frac{(a+b)^3}{a^2b^2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{(a+b)^8}{a^4b^4}}\cdot\sqrt[12]{\frac{(a+b)^9}{a^6b^6}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^{12}b^{12}}{(a+b)^{18}}}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{(a+b)^8}{a^4b^4}\cdot\frac{(a+b)^9}{a^6b^6}\cdot\frac{a^{12}b^{12}}{(a+b)^{18}}}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{a^2b^2}{a+b}}\ .$$

$$\left(\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}+\sqrt{\frac{1}{4x^2-1}}\right):\frac{1}{\sqrt{2x-1}}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}+\sqrt{\frac{1}{(2x+1)(2x-1)}}\right)\cdot\sqrt{2x-1}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\cdot\sqrt{2x-1}+\sqrt{\frac{1}{(2x+1)(2x-1)}}\cdot\sqrt{2x-1}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2x-1)^2}{2x+1}}+\sqrt{\frac{2x-1}{(2x+1)(2x-1)}}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{\frac{1}{2x+1}}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{2x-1+1-2x}{\sqrt{2x+1}}=\frac{0}{\sqrt{2x+1}}=0\ .$$

10. $Verifica\ la\ seguente\ \ identità$: $\dfrac{cos^2x}{1-cos^2x} - tgx - \dfrac{sen^2x-1}{cos^2x} - \dfrac{1}{sen^2x} = -tgx$

Soluzione 1

$$\frac{cos^2x}{1-cos^2x} - tgx - \frac{sen^2x-1}{cos^2x} - \frac{1}{sen^2x} = -tgx$$

$$\frac{cos^2x}{sen^2x} - tg\,x - \frac{-cos^2x}{cos^2x} - \frac{1}{sen^2x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{cos^2x}{sen^2x} - tg\,x + 1 - \frac{1}{sen^2x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{cos^2x}{sen^2x} + 1 - \frac{1}{sen^2x} - tg\,x = -tgx\ ;$$

$$\frac{cos^2x + sen^2x - 1}{sen^2x} - tg\,x = -tgx\ ;$$

$$\frac{1-1}{sen^2x} - tg\,x = -tgx\ ;$$

$$-tg\,x = -tgx\ ;$$

Soluzione 2

$$\frac{cos^2x}{sen^2x} - \frac{sen\,x}{cos\,x} - \frac{-cos^2x}{cos^2x} - \frac{1}{sen^2x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{cos^4x - sen^3x\cdot\cos x + sen^2x\cdot cos^2x - cos^2x}{sen^2x\cdot cos^2x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{\cos x\cdot(cos^3x - sen^3x + sen^2x\cdot\cos x - \cos x)}{sen^2x\cdot cos^2x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{cos^3x - sen^3x + sen^2x\cdot\cos x - \cos x}{sen^2x\cdot\cos x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{-\cos x\cdot(1-cos^2x) - sen^3x + sen^2x\cdot\cos x}{sen^2x\cdot\cos x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{-\cos x\cdot sen^2x - sen^3x + sen^2x\cdot\cos x}{sen^2x\cdot\cos x} = -tgx\ ;$$

$$\frac{-sen^3x}{sen^2x\cdot\cos x} = -tgx\ ;$$

$$-\frac{senx}{\cos x} = -tgx\ ;$$

$$-tg\,x = -tgx\ .$$