Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Sistemi + Geometria

06.06.2012

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni :

$\begin{cases} 3xy = 1 \\ 36x^2 + 36y^2 = 25 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 5y = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 6y = 3 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 4x^2 + 4y^2 = 65 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{10 + 3x} \\ xy + 15 = 2y^2 - 6x^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \\ y^2 + x^2 = 20 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x - y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 33 \end{cases}$

2. Risolvi le seguenti equazioni irrazionali :

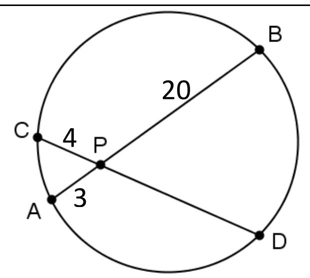
$\sqrt{3x^2 + 4x + 10} + 5 = 4x$ $\qquad$ $\sqrt{3(x-1)} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4(3x+2)} - 2 = x$

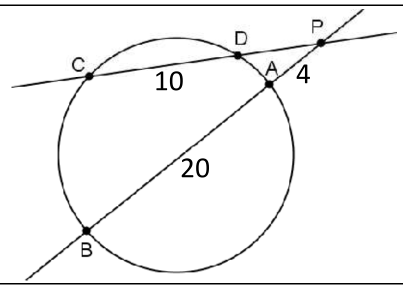
3. Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali :

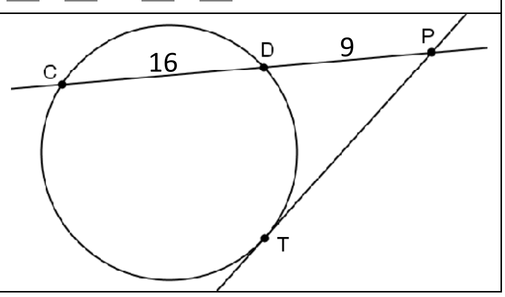
$x > 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ $\qquad$ $3 + \sqrt{x^2 + 3} > 2x$ $\qquad$ $\sqrt[3]{13x^2 + 16x - 20} - x < 2$

4. In ciascuna delle seguenti figure, determina il valore di PD

__ : __ = __ : __ $\quad \overline{PD} =$	__ : __ = __ : __ $\quad \overline{PD} =$	__ : __ = __ : __ $\quad \overline{PT} =$

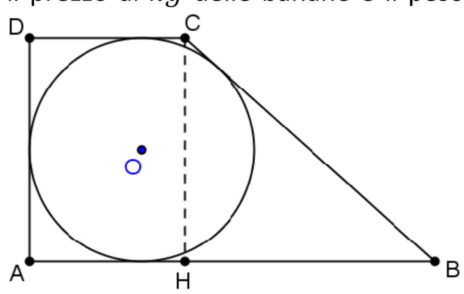




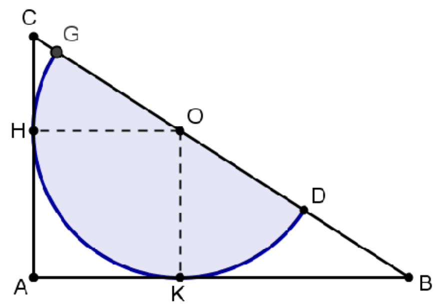


5. Un negoziante vende una cassa di banane a 120 €. L'acquirente si accorge, al ricevimento della merce, che il contenuto della cassa è costituito in realtà da mele, il cui prezzo al kg è inferiore di 50 $centesimi$ di euro rispetto a quelle delle banane. Tuttavia, poiché il peso della cassa è maggiore di 12 kg rispetto a quello pattuito, l'acquirente, verificata l'onestà del negoziante, ritiene di non dover protestare. Determina il prezzo al kg delle banane e il peso della cassa di mele.

6. Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza. Sapendo che l'altezza del trapezio misura 6 cm e la base maggiore misura 12 cm, calcola la misura del perimetro e l'area del trapezio.



7. Sia dato un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi $\overline{AC} = 21\ cm$ e $\overline{AB} = 28\ cm$, circoscritto a un semicerchio, come raffigurato a lato. Qual è l'area del semicerchio?



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	Totale
	Punti	24	12	12	6	9	8	9	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni :

$$\begin{cases} 3xy = 1 \\ 36x^2 + 36y^2 = 25 \end{cases} \qquad \left[\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5y = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 6y = 3 \end{cases} \qquad \left[(-2;-1), \left(-\frac{12}{5};-\frac{9}{5}\right)\right]$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 4x^2 + 4y^2 = 65 \end{cases} \qquad \left[\left(4;-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};4\right)\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \\ y^2 + x^2 = 20 \end{cases} \qquad [(4;2), (2;\ 4), (-4;-2), (-2;\ -4)]$$

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x - y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 33 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + z - 3 \\ y + z - 3 - y + z = -1 \\ (y + z - 3)^2 + y^2 + z^2 = 33 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + z - 3 \\ z = 1 \\ (y + z - 3)^2 + y^2 + z^2 = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + z - 3 \\ z = 1 \\ (y + 1 - 3)^2 + y^2 + 1^2 = 33 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + z - 3 \\ z = 1 \\ (y - 2)^2 + y^2 + 1 = 33 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ y^2 + 4 - 4y + y^2 + 1 = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ 2y^2 - 4y - 28 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ y^2 - 2y - 14 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ y_{1,2} = 1 \mp \sqrt{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{15} + 1 - 3 \\ y_1 = 1 - \sqrt{15} \\ z_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 + \sqrt{15} + 1 - 3 \\ y_2 = 1 + \sqrt{15} \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{15} \\ y_1 = 1 - \sqrt{15} \\ z_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 + \sqrt{15} \\ y_2 = 1 + \sqrt{15} \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{10+3x} \\ xy + 15 = 2y^2 - 6x^2 \end{cases} \qquad C.E.:\ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -\frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} 10 + 3x = x \\ xy + 15 = 2y^2 - 6x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = -10 \\ xy + 15 = 2y^2 - 6x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5 \\ xy + 15 = 2y^2 - 6x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ -5y + 15 = 2y^2 - 6 \cdot 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 2y^2 + 5y - 165 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y_{1,2} = \dfrac{-5 \mp \sqrt{1345}}{4} \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = \frac{-5-\sqrt{1345}}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = \frac{-5+\sqrt{1345}}{4} \end{cases}$

2. Risolvi le seguenti equazioni irrazionali :

$\sqrt{3x^2 + 4x + 10} + 5 = 4x$ $\qquad [x = 3]$

$\sqrt{3(x-1)} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$ $\qquad [x = 4]$

$\sqrt[3]{4(3x+2)} - 2 = x$ $\qquad [x = 0 \ ; \ x = -6]$

3. Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali :

$x > 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ $\qquad [\ \nexists x \in R\ ]$

$3 + \sqrt{x^2 + 3} > 2x$ $\qquad \left[x < 2 + \sqrt{2}\right]$

$\sqrt[3]{13x^2 + 16x - 20} - x > 2$ $\qquad \sqrt[3]{13x^2 + 16x - 20} > x + 2$

$13x^2 + 16x - 20 > x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$;

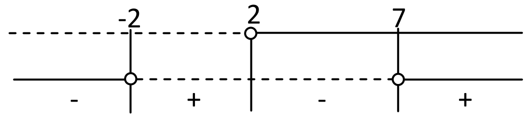
$x^3 - 7x^2 - 4x + 28 < 0$;

	1	−7	−4	+28
2		+2	−10	−28
	1	−5	−14	=

$(x-2)(x^2 - 5x - 14) < 0$

$x - 2 > 0$ $\qquad x > 2$

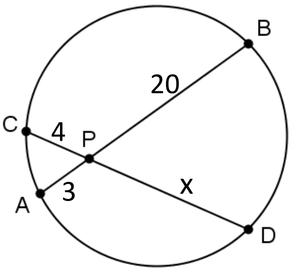
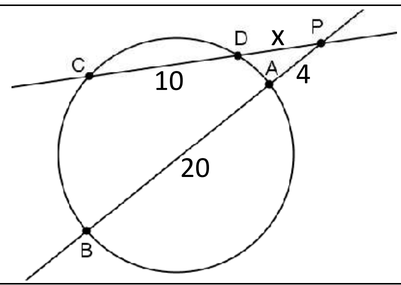
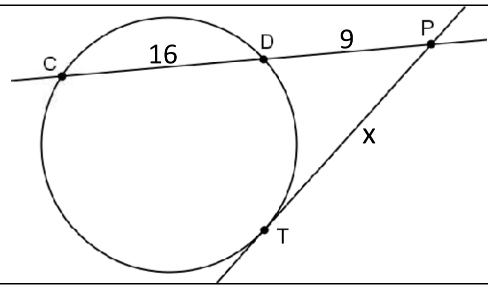
$x^2 - 5x - 14 > 0$ $\qquad x < -2 \ \vee \ x > 7$



$x^2 - 5x - 14 = 0$; $\qquad \Delta = 25 + 56 = 81$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{5 \mp 9}{2} = \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_1 = +7 \end{matrix}$

La soluzione è: $\quad x < -2 \ \vee \ 2 < x < 7$.

4. In ciascuna delle seguenti figure, determina il valore di x

$PC : PA = PB : PD \quad PD = \frac{PA \cdot PB}{PC} = 15$	$PC : PA = PB : PD \quad PD = \frac{PA \cdot PB}{PC} = 6$	$PC : PT = PT : PD \quad PT = \sqrt{PC \cdot PD} = 15$
		

5. Un negoziante vende una cassa di banane a 120 €. L'acquirente si accorge, al ricevimento della merce, che il contenuto della cassa è costituito in realtà da mele, il cui prezzo al kg è inferiore di 50 $centesimi$ di euro rispetto a quelle delle banane. Tuttavia, poiché il peso della cassa è maggiore di 12 kg rispetto a quello pattuito, l'acquirente, verificata l'onestà del negoziante, ritiene di non dover protestare. Determina il prezzo al kg delle banane e il peso della cassa di mele.

Soluzione

Ponendo il $prezzo\ al\ kg\ delle\ banane = x$ e il $peso\ della\ cassa\ di\ banane = y$ si ha:

$$\begin{cases} x \cdot y = 120 \\ (x - 0{,}50)(y + 12) = 120 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{120}{x} \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(y + 12) = 120 \end{cases} \qquad \begin{cases} — \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{120}{x} + 12\right) = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} — \\ 120 + 12x - \dfrac{60}{x} - 6 = 120 \end{cases} \qquad \begin{cases} — \\ 12x - \dfrac{60}{x} - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} — \\ 12x^2 - 60 - 6x = 0 \end{cases}$$

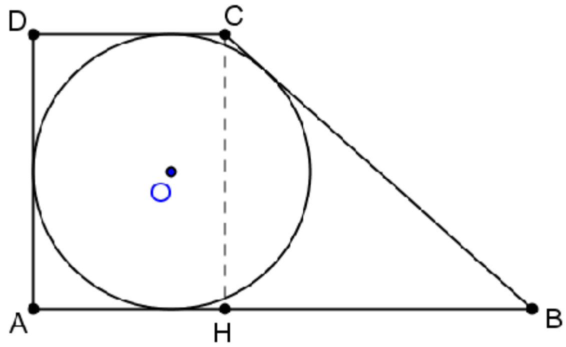
$$\begin{cases} — \\ 2x^2 - x - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} — \\ x_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{81}}{4} = \begin{matrix} \dfrac{1-9}{4} = -2 \\ \dfrac{1+9}{4} = \dfrac{5}{2} \end{matrix} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -60 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = \dfrac{5}{2} \\ y_2 = 48 \end{cases} \end{matrix}$$

Pertanto, scartando le soluzioni negative, si ha che:

il prezzo al kg delle banane è di 2,50 € .

il peso della cassa di banane è di $(48 + 12)\ kg = 60\ kg$.

6. Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza. Sapendo che l'altezza del trapezio misura 6 cm e la base maggiore misura 12 cm, calcola la misura del perimetro del trapezio.



Soluzione

Ponendo $\overline{DC} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} = 12 - x$.

Ricordando che un quadrilatero è circoscrivibile a una circonferenza se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due lati, si ha:

$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$; $\qquad 6 + \overline{BC} = 12 + x$; $\qquad \overline{BC} = x + 6$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

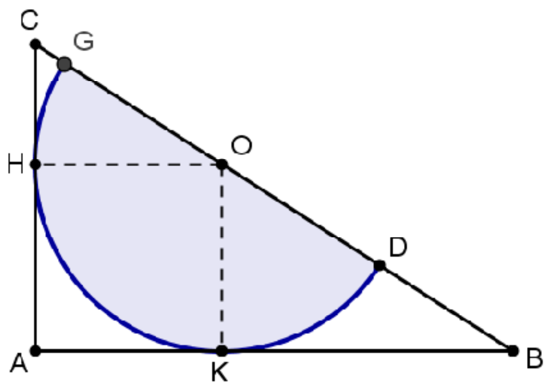
$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$; $\qquad (x+6)^2 = 6^2 + (12-x)^2$; $\qquad x^2 + 36 + 12x = 36 + 144 + x^2 - 24x$;

$36x = 144$; $\qquad x = 4$.

Pertanto $\overline{DC} = 4\ cm$, $\quad \overline{HB} = 8\ cm$

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = (12 + 10 + 4 + 6)\ cm = 32\ cm$.

7. Sia dato un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi $\overline{AC} = 21\ cm$ e $\overline{AB} = 28\ cm$, circoscritto a un semicerchio, come raffigurato a lato. Qual è l'area del semicerchio?



Soluzione

Ponendo il raggio $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OK}} = \mathrm{x} \qquad$ con $0 < x < 21$

$\Rightarrow \quad \overline{CH} = 21 - x \quad$ e $\quad \overline{KB} = 28 - x$.

Dalla similitudine dei due triangoli $CHO \approx BKO$ si ha:

$\overline{\mathrm{CH}} : \overline{\mathrm{OK}} = \overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{KB}}$; $\qquad (21 - x) : x = x : (28 - x)$; $\qquad (21 - x)(28 - x) = x^2$;

$588 - 21x - 28x + x^2 = x^2$; $\qquad -21x - 28x = -588$; $\qquad 49x = 588$;

$$x = \frac{588}{49} = 12$$

Pertanto il raggio $\overline{OH} = 12\ cm$.

L'area del semicerchio è:

$$s = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{OH}^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 12^2\ cm^2 \ = 72\,\pi\ cm^2 .$$