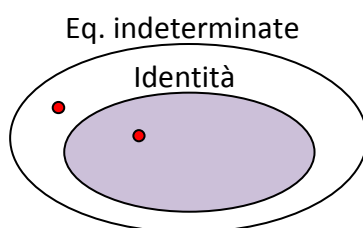


03.06.2011
prof. Mimmo Corrado

Soluzione

1. Ogni identità è un'equazione indeterminata ☒ V

Ogni equazione indeterminata è un'identità ☒ F



2. Indica con una croce il tipo di espressione:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$3 + 2x = 6 - 3$	R		X		
$x - y = 2$	R			X	
$2x + 1 = 2x + 3$	R				X
$2x + x = 3x$	R	X		X	
$ x = x$	R			X	

3. Verifica se l'espressione a lato è una identità: $\frac{x-3}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \right) = \frac{2}{3}x - \frac{15+x^2}{12}$

Soluzione

Semplifichiamo il primo membro:

$$\frac{x-3}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \right) = \frac{x-3}{2} \cdot \frac{2x+2-3x+3}{6} = \frac{x-3}{2} \cdot \frac{5-x}{6} = \frac{5x-x^2-15+3x}{12} = \frac{-x^2+8x-15}{12}$$

Semplifichiamo il secondo membro:

$$\frac{2}{3}x - \frac{15+x^2}{12} = \frac{8x-15-x^2}{12} = \frac{-x^2+8x-15}{12}$$

L'espressione è un'identità.

4.a Risolvi la seguente equazione:

$$14 - 2x(x-3) - (x^2-1)^2 = (4-x^2)(4+x^2)$$

Soluzione

$$14 - 2x^2 + 6x - (x^4 + 1 - 2x^2) = 16 - x^4$$

$$14 - 2x^2 + 6x - x^4 - 1 + 2x^2 = 16 - x^4$$

$$14 + 6x - 1 = 16$$

$$6x = 16 - 14 + 1$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

4.b Risolvi la seguente equazione:

$$6 + \frac{2}{x + x^2} = \frac{6x^2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x - x^2}$$

Soluzione

$$6 + \frac{2}{x(1+x)} = \frac{6x^2}{(x+1)(x-1)} + \frac{3}{x(1-x)}$$

$$6 + \frac{2}{x(1+x)} = \frac{6x^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{x(x-1)}$$

$$C.E.: \quad x \neq 0; \quad x \neq -1; \quad x \neq +1$$

$$m.c.m. = x(x+1)(x-1)$$

$$6x(x+1)(x-1) + 2(x-1) = 6x^2 \cdot x - 3(x+1)$$

$$6x(x^2 - 1) + 2x - 2 = 6x^3 - 3x - 3$$

$$6x^3 - 6x + 2x - 2 = 6x^3 - 3x - 3$$

$$-6x + 2x - 2 = -3x - 3$$

$$-6x + 2x + 3x = -3 + 2$$

$$-x = -1$$

$x = +1$ non accettabile. *Equazione impossibile.*

4.c Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{2x+3}{2x^2+5x+3} - \frac{x+1}{4x^2+4x-3} = \frac{3x^2+8}{4x^3+8x^2+x-3}$$

Soluzione

$$\frac{2x+3}{(x+1)(2x+3)} - \frac{x+1}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{3x^2+8}{(x+1)(2x-1)(2x+3)}$$

$$C.E.: \quad x \neq -1; \quad x \neq \frac{1}{2}; \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

$$m.c.m. = (x+1)(2x-1)(2x+3)$$

$$(2x-1)(2x+3) - (x+1)(x+1) = 3x^2+8$$

$$4x^2+6x-2x-3-x^2-1-2x=3x^2+8$$

$$6x-2x-3-1-2x=8$$

$$6x-2x-2x=8+3+1$$

$$2x=12$$

$x=6$ *Soluzione accettabile*

4.d Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{x+a}{a} = 3 - \frac{x-1}{a-1}$$

Soluzione

Affinché l'equazione non perda di significato, i denominatori devono essere diversi da zero, C.E.: $a \neq 0$ e $a \neq 1$

Moltiplicando tutti i termini per il m. c. m. = $a(a-1)$ si ottiene:

$$(a-1)(x+a) = 3a(a-1) - a(x-1)$$

$$ax + a^2 - x - a = 3a^2 - 3a - ax + a$$

$$ax - x + ax = 3a^2 - 3a + a - a^2 + a$$

$$2ax - x = 2a^2 - a$$

$$(2a-1)x = a(2a-1)$$

Discussione

$$\text{Se } 2a-1 \neq 0, \quad \text{cioè se } a \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{a(2a-1)}{2a-1} \quad x = a \quad \text{equazione determinata}$$

$$\text{Se } a = \frac{1}{2} \Rightarrow 0x = 0 \quad \text{equazione indeterminata}$$

Ricapitolando:

Parametro	Soluzione	Tipo di equazione
$a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$	$x = a$	<i>Equazione determinata</i>
$a = \frac{1}{2}$	<i>Infinite soluzioni</i>	<i>Equazione indeterminata</i>
$a = 0 \vee a = 1$	-	<i>Equazione che perde di significato</i>

5. Data la formula: $s = \frac{1}{2}at^2 + vt$ ricava la formula inversa per determinare a .

Soluzione

$$2s = at^2 + 2vt$$

$$at^2 = 2s - 2vt$$

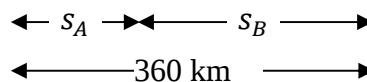
$$a = \frac{2s - 2vt}{t^2} \quad \text{con } t \neq 0$$

6. Due treni partono contemporaneamente da due stazioni A e B, distanti 360 km e poste sulla stessa linea. Il primo treno, partito dalla stazione A, viaggia a 120 km/h verso la stazione B; il secondo treno, partito dalla stazione B, viaggia a 150 km/h verso la stazione A. Dopo quanto tempo (in ore e minuti) i due treni si incontrano? A che distanza dalla stazione A si incontrano?

Soluzione

La condizione di accettabilità è $t > 0$.

Ricordando che la velocità $v = \frac{s}{t}$ si ha che: $s = v \cdot t$



Nell'istante del contatto i due treni hanno percorso insieme l'intero tragitto.

$$s_A + s_B = 360 \text{ km}$$

$$v_A \cdot t_A + v_B \cdot t_B = 360 \quad \text{ma } t_A = t_B = t \quad \Rightarrow$$

$$120 \cdot t + 150 \cdot t = 360$$

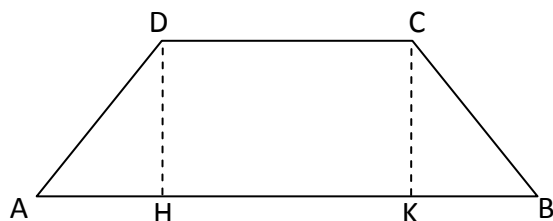
$$270t = 360$$

$$t = \frac{360}{270} = \frac{4}{3} = 1,33^h = 1^h (0,33 \cdot 60)^l = 1^h 20^l$$

Il treno A incontra il treno B dopo un percorso $s_A = v_A \cdot t = 120 \text{ km/h} \cdot 1,33 \text{ h} = 160 \text{ km}$.

7. In un trapezio isoscele la base maggiore è il doppio della base minore e i lati obliqui sono ciascuno i $\frac{5}{6}$ della base minore. Sapendo che il perimetro del trapezio è 28 cm, determina la sua area.

Soluzione



$$\text{Ponendo } CD = x \Rightarrow AB = 2x \quad \text{e} \quad AD = \frac{5}{6}x$$

Essendo il perimetro del trapezio uguale a 28 cm, si ottiene:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 28$$

$$2x + \frac{5}{6}x + x + \frac{5}{6}x = 28$$

$$12x + 5x + 6x + 5x = 168$$

$$28x = 168 \quad x = \frac{168}{28} = 6$$

$$\text{Pertanto: } \overline{CD} = 6 \text{ cm} \quad \overline{AB} = 12 \text{ cm} \quad \overline{AD} = \frac{5}{6} \cdot 6 = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{(12 - 6) \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo AHD si determina l'altezza:

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2} = \sqrt{16 \text{ cm}^2} = 4 \text{ cm}$$

L'area del trapezio vale:

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{12 \text{ cm} + 6 \text{ cm}}{2} \cdot 4 \text{ cm} = \frac{18 \text{ cm}}{2} \cdot 4 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2.$$

8. Sia ABC un triangolo. Traccia la retta r, passante per B e parallela ad AC e la retta s passante per A e parallela a BC, indicando con D il loro punto d'intersezione. Dimostra che:

- i triangoli ABC e ABD sono congruenti
- la mediana AM del triangolo ABC è parallela alla mediana BN del triangolo ABD.

Dimostrazione a

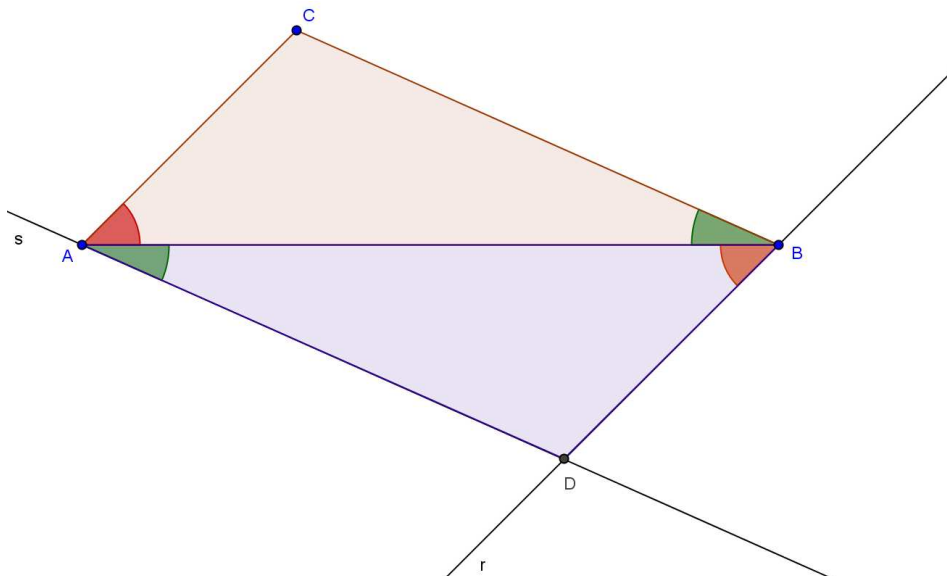
I triangoli ABC e ABD sono congruenti per il II criterio di congruenza.

Infatti essi hanno:

Il lato AB in comune

$\widehat{BAC} \cong \widehat{ABD}$ perché alterni interni

$\widehat{ABC} \cong \widehat{BAD}$ perché alterni interni



Dimostrazione b

I triangoli ABM e ABN sono congruenti per il I criterio di congruenza.

Infatti essi hanno:

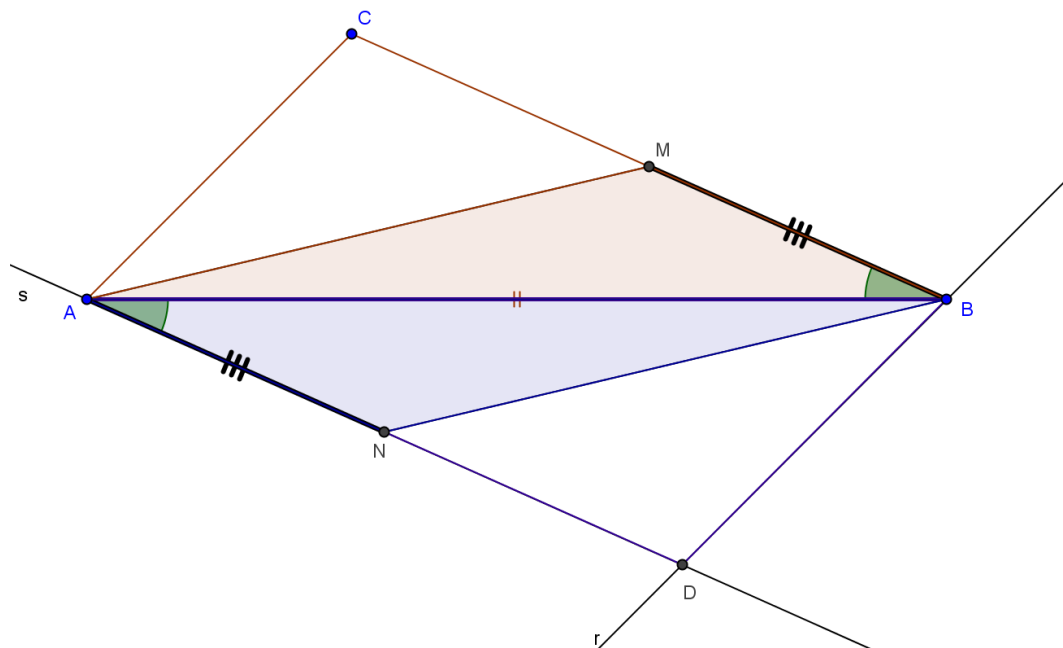
Il lato AB in comune

Il lato $BM \cong AN$ perché $BM \cong \frac{1}{2}BC \cong \frac{1}{2}AD \cong AN$

$\widehat{ABM} \cong \widehat{ABN}$ perché alterni interni fra le due rette parallele AD e BC e la trasversale AB

Essendo i triangoli ABM e ABN congruenti, gli angoli $\widehat{ABN} \cong \widehat{ABM}$

Pertanto essendo essi alterni interni si deduce che le mediane AM e BN sono parallele.



Esercizio di Petta

$$\frac{x+3b}{x+b} - \frac{2b(x-b)}{x^2-bx+b^2} = \frac{4x^3+3b^3}{x^3+b^3}$$

$$\frac{x+3b}{x+b} - \frac{2b(x-b)}{x^2-bx+b^2} = \frac{4x^3+3b^3}{(x+b)(x^2-bx+b^2)}$$

Per $x+b \neq 0$ cioè per $x \neq -b$ si ha:

$$(x+3b)(x^2-bx+b^2) - 2b(x-b)(x+b) = 4x^3+3b^3$$

$$x^3 - bx^2 + b^2x + 3bx^2 - 3b^2x + 3b^3 - 2bx^2 + 2b^3 = 4x^3 + 3b^3$$

$$-bx^2 + b^2x + 3bx^2 - 3b^2x - 2bx^2 = -2b^3$$

$$-2b^2x = -2b^3$$

$$2b^2x = 2b^3$$

$$b^2x = b^3$$

$$\text{Se } b \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b^3}{b^2}; x = b$$

Ricordando la condizione di esistenza $x \neq -b$ la soluzione $x = b$ è accettabile se $b \neq -b$.

Ma $b \neq -b$ se $b \neq 0$

Se $b = 0 \Rightarrow 0x = 0$ equazione indeterminata

Ricapitolando

Parametro	Soluzione	Tipo di equazione
$b = 0$	$x = b$	<i>equazione determinata</i>
$b \neq 0$	<i>infinite</i>	<i>equazione indeterminata</i>