Prova di Matematica : Polinomi

05.03.2011
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 1 B

1. Sviluppa i seguenti prodotti notevoli:

$\left(-\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab^5\right)^2$ $\quad$ $\left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^5y\right)^3$ $\quad$ $\left(-\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{2}ab + 2b^5\right)^2$

$\left(ab^{2p} - \frac{3}{2}b^p\right)^3$ $\quad$ $\left(a^3 - \frac{1}{3}ab\right)^4$ $\quad$ $\left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab - 2b^4\right)\left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab + 2b^4\right)$

2. Completa le seguenti uguaglianze:

$4x^2 + \ldots + \ldots = (\ldots + 4y^5)^2$ $\quad$ $(\ldots + 4y^5)\cdot(3x^3 - \ldots) = 9x^6 - 16y^{10}$

$8x^3 + 6x^4y + \frac{3}{2}x^5y^2 + \ldots = (\ldots + \ldots)^3$ $\quad$ $4a^2 + 4b^{10} + \ldots - \ldots - \ldots + \ldots = \left(\ldots - \frac{3}{2}ab + \ldots\right)^2$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$(3x + 2y)\cdot(2x - 5y) + (2x - 3y)\cdot(3x + 5y + 1) - (4x + 3y - 2)\cdot(5x - 2y)$

$2x\cdot\{3x^3 + (2x - y)\cdot[(x + y)\cdot(2x - y) - (3x - y)\cdot(x + y)]\}$

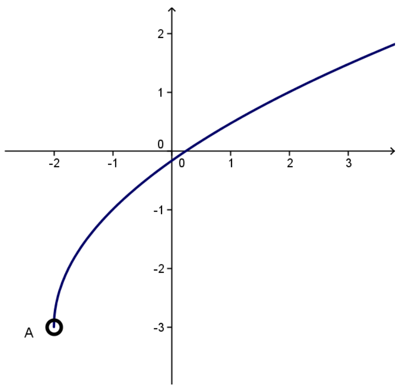
$\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}xy\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}xy\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}xy\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}xy\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}xy\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}xy\right)^3$

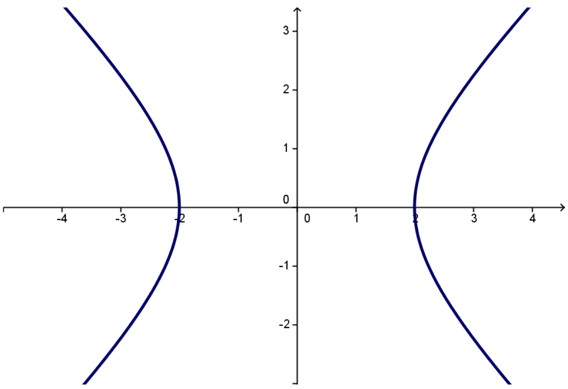
4. Esegui le seguenti divisioni fra polinomi:

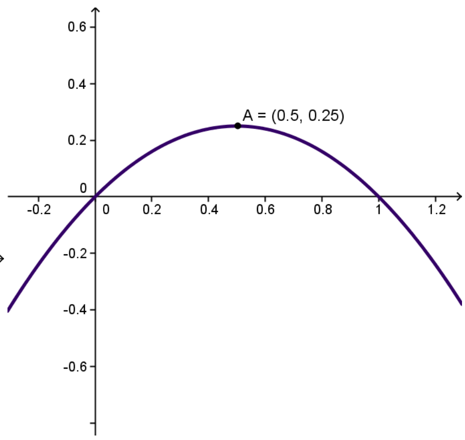
$\left(2a^6 - 33a^5 + 40a^4 - 24a^2 + 21a - 6\right):(2a^2 - 3a + 1)$ $\quad$ $(a^5 + 6a^3 - 5a^4 + 11a^2 - 43a + 30):(a + 2)$

5. Stabilisci se la relazione $f: A \to B$ con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ individuata dalle seguenti coppie di valori $(1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 4)$ è una funzione, e in caso affermativo indicane il tipo.

6. Individua, fra i grafici sottostanti, quelli che rappresentano funzioni $f: R \to R$.
Di esse determina poi: il tipo, il dominio e il codominio.







7. Traccia il grafico delle seguenti funzioni: $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = -x^2 + 6$

8. Se a, b e c sono numeri tali che: $\frac{b}{a} = 2$ e $\frac{c}{b} = 3$, quanto vale $\frac{a+b}{b+c}$?

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
	Punti	12	12	24	14	8	10	3 + 7	10	100
	Voto	Punteggio grezzo / 10								

Soluzione

1. Sviluppa i seguenti prodotti notevoli:

$$\left(-\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{3}ab^5\right)^2 \;=\; \frac{9}{4}a^4+\frac{1}{9}a^2b^{10}+a^3b^5$$

$$\left(-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^5y\right)^3 \;=\; -\frac{27}{8}x^6-\frac{9}{4}x^9y-\frac{1}{2}x^{12}y^2-\frac{1}{27}x^{15}y^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{2}ab+2b^5\right)^2 \;=\; \frac{4}{9}a^6+\frac{9}{4}a^2b^2+4b^{10}+2a^4b-\frac{8}{3}a^3b^5-6ab^6$$

$$\left(ab^{2p}-\frac{3}{2}b^p\right)^3 \;=\; a^3b^{6p}-\frac{9}{2}a^2b^{5p}+\frac{27}{4}ab^{4p}-\frac{27}{8}b^{3p}$$

$$\left(a^3-\frac{1}{3}ab\right)^4 \;=\; a^{12}-\frac{4}{3}a^{10}b+\frac{2}{3}a^8b^2-\frac{4}{27}a^6b^3+\frac{1}{81}a^4b^4$$

$$\left(-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}ab-2b^4\right)\left(-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}ab+2b^4\right) \;=$$

$$=\;\left[\left(-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}ab\right)-2b^4\right]\cdot\left[\left(-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}ab\right)+2b^4\right]=$$

$$=\;\left(-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}ab\right)^2-(2b^4)^2=$$

$$=\;\frac{9}{4}a^4+\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{3}{2}a^3b-4b^8\;.$$

2. Completa le seguenti uguaglianze:

$4x^2 + 16y^{10} + 16xy^5 = (2x + 4y^5)^2$

$(3x^3 + 4y^5) \cdot (3x^3 - 4y^5) = 9x^6 - 16y^{10}$

$8x^3 + 6x^4y + \frac{3}{2}x^5y^2 + \frac{1}{8}x^6y^3 = \left(2x + \frac{1}{2}x^2y\right)^3$

$4a^2 + 4b^{10} + \dfrac{9}{4}a^2b^2 - 6a^2b - 6ab^6 + 8ab^5 = \left(2a - \dfrac{3}{2}ab + 2b^5\right)^2$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$(3x + 2y) \cdot (2x - 5y) + (2x - 3y) \cdot (3x + 5y + 1) - (4x + 3y - 2) \cdot (5x - 2y) =$

$= 6x^2 - 15xy + 4xy - 10y^2 + 6x^2 + 10xy + 2x - 9xy - 15x^2 - 3y - (20x^2 - 8xy + 15xy - 6y^2 - 10x + 4y) =$

$= 6x^2 - 15xy + 4xy - 10y^2 + 6x^2 + 10xy + 2x - 9xy - 15x^2 - 3y - 20x^2 + 8xy - 15xy + 6y^2 + 10x - 4y =$

$= -8x^2 - 17xy - 19y^2 + 12x - 7y$.

$2x \cdot \{3x^3 + (2x - y) \cdot [(x + y) \cdot (2x - y) - (3x - y) \cdot (x + y)\,]\,\} =$

$= 2x \cdot \{3x^3 + (2x - y) \cdot [2x^2 - xy + 2xy - y^2 - (3x^2 + 3xy - xy - y^2)\,]\,\} =$

$= 2x \cdot \{3x^3 + (2x - y) \cdot [2x^2 - xy + 2xy - y^2 - 3x^2 - 3xy + xy + y^2\,]\,\} =$

$= 2x \cdot \{3x^3 + (2x - y) \cdot [-x^2 - xy\,]\,\} =$

$= 2x \cdot \{3x^3 + 2x^3 - 2x^2y + x^2y + xy^2\} =$

$= 2x \cdot \{x^3 - x^2y + xy^2\} =$

$= 2x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2$.

$$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^2+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3=$$

$$=1\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3+1\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3=$$

$$=8\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3=$$

$$=8\cdot\left(\frac{1}{8}x^6-\frac{8}{27}x^3y^3-\frac{1}{2}x^5y+\frac{2}{3}x^4y^2\right)=$$

$$=x^6-\frac{64}{27}x^3y^3-4x^5y+\frac{16}{3}x^4y^2$$

Oppure

$$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^2+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)^3=$$

$$=\left[\ \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)\ +\ \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\right)\ \right]^3=$$

$$=\left[\ \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy\ \right]^3=$$

$$=\left[\ x^2-\frac{4}{3}xy\ \right]^3=$$

$$=x^6-\frac{64}{27}x^3y^3-4x^5y+\frac{16}{3}x^4y^2$$

4. Esegui le seguenti divisioni fra polinomi:

$\left(2a^6-33a^5+40a^4-24a^2+21a-6\right):(2a^2-3a+1)$

$2a^6$	$-33a^5$	$+40a^4$		$-24a^2$	$21a$	-6	$2a^2-3a+1$
$-2a^6$	$+3a^5$	$-a^4$					$a^4-15a^3-3a^2+3a-6$
$=$	$-30a^5$	$39a^4$					
	$+30a^5$	$-45a^4$	$+15a^3$				
	$=$	$-6a^4$	$+15a^3$				
		$+6a^4$	$-9a^3$	$+3a^2$			
		$=$	$+6a^3$	$-21a^2$			
			$-6a^3$	$+9a^2$	$+3a$		
			$=$	$-12a^2$	$+18a$		
				$+12a^2$	$-18a$	$+6$	
				$=$	$=$	$=$	

$(a^5+6a^3-5a^4+11a^2-43a+30):(a+2)$

	1	-5	+6	+11	-43	+30
-2		-2	+14	-40	+58	-30
	1	-7	+20	-29	+15	0

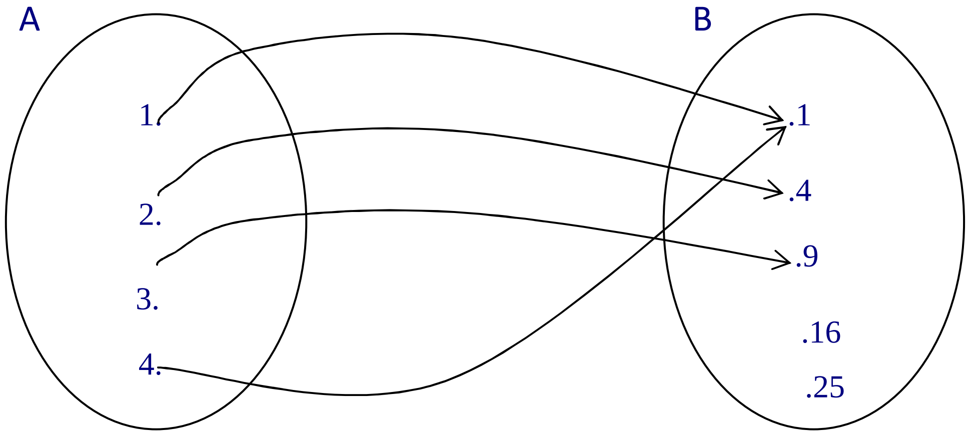
Quoziente $q(x)=a^4-7a^3+20a^2-29a+15$ *e resto* $r=0$.

5. Stabilisci se la relazione $f: A \rightarrow B$ con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ individuata dalle seguenti coppie di valori $(1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 4)$ è una funzione, e in caso affermativo indicane il tipo.

Soluzione

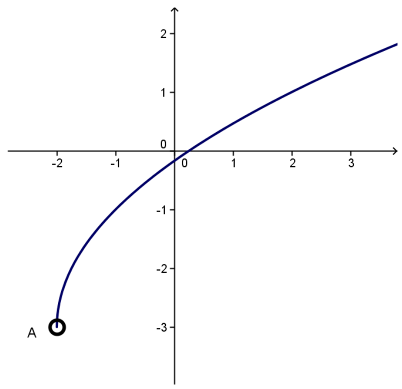
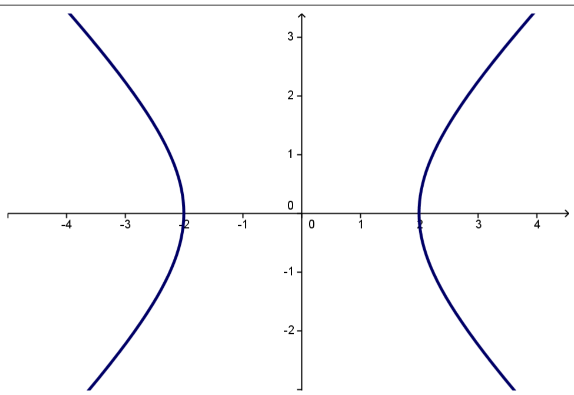
La relazione $f: A \rightarrow B$ è una funzione.

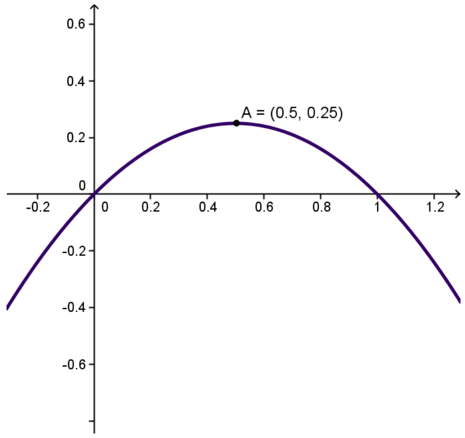
Non è iniettiva, perché elementi differenti del dominio, $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$ hanno lo stesso elemento corrispondente $y_1 = 1$
Non è suriettiva, perché ci sono elementi dell'insieme di arrivo $y_4 = 16$ e $y_5 = 25$ che non hanno una controimmagine nel Dominio A.



6. Individua, fra i grafici sottostanti, quelli che rappresentano funzioni $f: R \rightarrow R$.
Di esse determina poi: il tipo, il dominio e il codominio.

Soluzione

	Quello a lato è il grafico di una funzione iniettiva con dominio: $D = (-2, +\infty)$. Iniettiva: perché, ad elementi differenti del dominio corrispondono elementi differenti del codominio *(una qualsiasi retta orizzontale incontra la curva al massimo in un punto)* . Non è suriettiva, perché i punti con ordinata $y < -3$ non hanno una controimmagine nel dominio D). La funzione diventa suriettiva se si considera come insieme di arrivo il codominio: $C = (-3, +\infty)$
	Quello a lato non rappresenta il grafico di una funzione. Ad ogni elemento x del Dominio non corrisponde <u>uno e uno solo</u> elemento y dell'insieme di arrivo. *(Una qualsiasi retta verticale incontra la curva in più di un punto)*



Quello a lato è il grafico di una funzione non iniettiva e non suriettiva con dominio: $D = (-\infty, +\infty)$

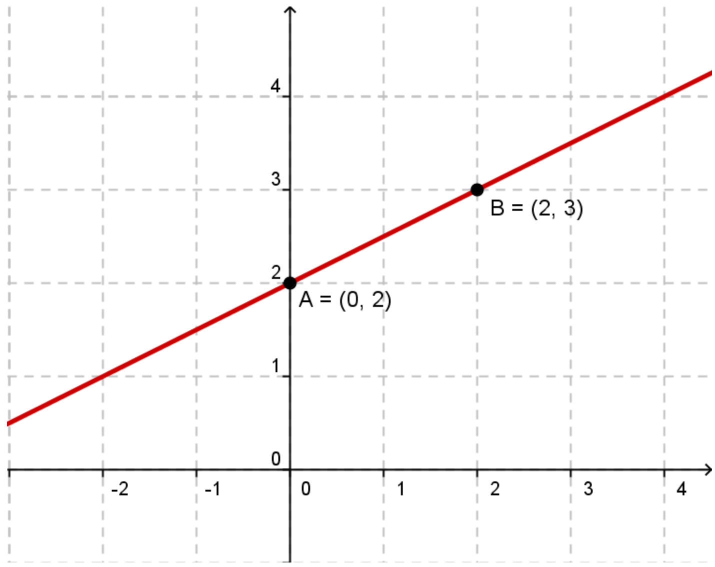
Non iniettiva: perché, ad elementi differenti del dominio non corrispondono elementi differenti del codominio.

Non suriettiva, perché i punti con ordinata $y > 0{,}25$ non hanno una controimmagine nel dominio D.

La funzione diventa suriettiva se si considera come insieme di arrivo il codominio: $C =]-\infty, 0{,}25]$.

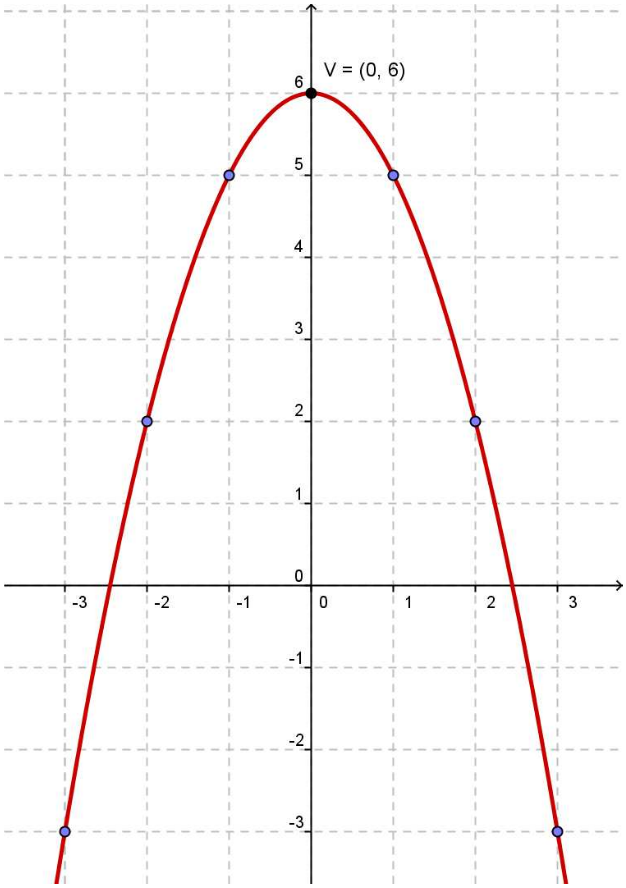
7. Traccia il grafico della seguente funzione: $y = \frac{1}{2}x + 2$

x	y
0	2
2	3



7. Traccia il grafico della seguente funzione: $y = -x^2 + 6$

x	y
0	6
-1	5
-2	2
-3	-3
1	5
2	2
3	-3



8. Se a, b e c sono numeri tali che: $\frac{b}{a} = 2$ e $\frac{c}{b} = 3$, quanto vale $\frac{a+b}{b+c}$?

Soluzione

$$Se \ \frac{b}{a} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}b$$

$$Se \ \frac{c}{b} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad c = 3b$$

Sostituendo si ha:

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{\frac{1}{2}b+b}{b+3b} = \frac{\frac{3}{2}b}{4b} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$