Prova di Matematica : Equazioni e problemi di I° grado

04.06.2011
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 1 B

1. Indica con una croce il tipo di espressione:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$3x = 3x + 1$	R				
$5x - 1 = 4 - 5$	R				
$x + y = 10$	R				
$3(2x + 1) = 3 + 6x$	R				

2. Verifica se l'uguaglianza a lato è una identità: $1 - \dfrac{2a + b}{a - b} = \dfrac{a + b}{b - a} - \dfrac{b}{a - b}$

3. Data la formula: $\mathrm{F} = \mathrm{k} \cdot \dfrac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{Q}}$ ricava la formula inversa per determinare R .

4. Risolvi le seguenti equazioni:

$$(2x - 3)^2 - (2x + 1)(2x - 1) - 3x(1 - 2x) - 15 = 2x(3x - 5) \quad (con\ verifica)$$

$$2x - \left[\frac{x - 2}{3} - \frac{1 - x}{3} - \left(\frac{2x + 1}{2} + 5x\right)\right] = \frac{3}{2}$$

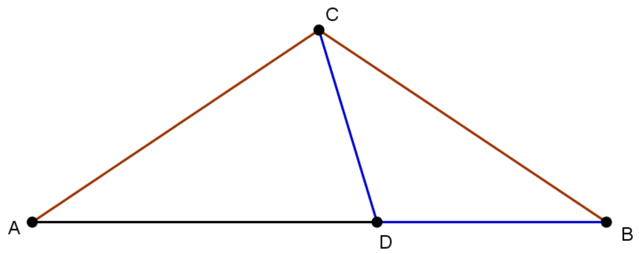
$$\frac{1}{x^2 - 4x} - \frac{2}{x^2 + x} = \frac{5x + 10}{x^3 - x^2 - 10x - 8} - \frac{3}{x + x^2}$$

$$\frac{a + x}{a^2 - 4a + 4} - \frac{1}{a - 3} = -\frac{x + 3}{a^2 - 5a + 6}$$

$$1 - \frac{5}{m + 2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{mx + 2x}$$

5. Un treno A parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di 120 km/h. Un'ora dopo dalla stessa stazione parte un treno B, che viaggia nella stessa direzione e verso alla velocità costante di 170 km/h . Dopo quanto tempo (in ore e minuti) il treno B raggiunge il treno A ? A che distanza dalla stazione di partenza avviene il contatto ?

6. È dato un triangolo isoscele ABC, in cui $AC \cong BC$. Il punto D sul lato AB è tale che $AD \cong AC$ e $BD \cong CD$. Calcola la misura dell'angolo $A\hat{C}B$.



7. Dato un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, conduci per il vertice C la semiretta perpendicolare a BC che giace nel semipiano, avente come origine la retta BC, a cui non appartiene il vertice A. Sia D il punto della semiretta tale che $CD \cong AC$ ed E il punto di intersezione della retta AD con la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. Supposto $A\hat{B}C = 2\alpha$, esprimi in funzione di α le ampiezze:
   a. degli angoli dei triangoli ABC e ACD;
   b. degli angoli $E\hat{A}B$ e $A\hat{E}B$.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	Totale
	Punti	5	7	6	8 + 8 + 12 + 12 + 12	10	10	10	100
	Voto	Punteggio grezzo / 10							

Soluzione

1. Indica con una croce il tipo di espressione:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$3x = 3x + 1$	R				X
$5x - 1 = 4 - 5$	R		X		
$x + y = 10$	R			X	
$3(2x + 1) = 3 + 6x$	R	X		X	

2. Verifica se l'uguaglianza a lato è una identità: $\quad 1 - \dfrac{2a+b}{a-b} = \dfrac{a+b}{b-a} - \dfrac{b}{a-b}$

Soluzione

Semplifichiamo il primo membro:

$$1 - \frac{2a+b}{a-b} = \frac{a-b-2a-b}{a-b} = \frac{-a-2b}{a-b} = \frac{a+2b}{b-a} \quad .$$

Semplifichiamo il secondo membro:

$$\frac{a+b}{b-a} - \frac{b}{a-b} = \frac{a+b}{b-a} - \frac{b}{-(b-a)} = \frac{a+b}{b-a} + \frac{b}{b-a} = \frac{a+b+b}{b-a} = \frac{a+2b}{b-a} \quad .$$

Per $b - a \neq 0$, cioè per $a \neq b$ l'uguaglianza è un'identità.

3. Data la formula: $\mathrm{F} = \mathrm{k} \cdot \dfrac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{Q}}$ ricava la formula per determinare R .

Soluzione

$$R^2 - Q = k\frac{A \cdot B}{F} \;; \qquad R^2 = k\frac{A \cdot B}{F} + Q; \qquad R = \sqrt{k\frac{A \cdot B}{F} + Q}$$

4.a Risolvi la seguente equazione:

$$(2x-3)^2 - (2x+1)(2x-1) - 3x(1-2x) - 15 = 2x(3x-5) \qquad (con\ verifica)$$

Soluzione

$4x^2 + 9 - 12x - 4x^2 + 1 - 3x + 6x^2 - 15 = 6x^2 - 10x$

$+9 - 12x + 1 - 3x - 15 = -10x$

$-12x - 3x + 10x = -9 - 1 + 15$

$-5x = 5$

$5x = -5$

$x = -1$

Verifica

$(2 \cdot (-1) - 3)^2 - (2 \cdot (-1) + 1)(2 \cdot (-1) - 1) - 3 \cdot (-1)\big(1 - 2 \cdot (-1)\big) - 15 = 2 \cdot (-1)(3 \cdot (-1) - 5)$

$(-2-3)^2 - (-2+1)(-2-1) + 3(1+2) - 15 = -2(-3-5)$

$(-5)^2 - (-1)(-3) + 3 \cdot 3 - 15 = -2(-8)$

$25 - 3 + 9 - 15 = 16$

$16 = 16\,.$

4.b Risolvi la seguente equazione:

$$2x-\left[\frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{3}-\left(\frac{2x+1}{2}+5x\right)\right]=\frac{3}{2}$$

$$2x-\left[\frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{3}-\frac{2x+1}{2}-5x\right]=\frac{3}{2}$$

$$2x-\frac{x-2}{3}+\frac{1-x}{3}+\frac{2x+1}{2}+5x=\frac{3}{2}$$

$$12x-2(x-2)+2(1-x)+3(2x+1)+30x=9$$

$$12x-2x+4+2-2x+6x+3+30x=9$$

$$12x-2x-2x+6x+30x=9-4-2-3$$

$$44x=0$$

$\mathrm{x}=0$ Soluzione accettabile $\Rightarrow$ Equazione determinata.

4.c Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{1}{x^2-4x}-\frac{2}{x^2+x}=\frac{5x+10}{x^3-x^2-10x-8}-\frac{3}{x+x^2}$$

<u>*Soluzione*</u>

$$\frac{1}{x(x-4)}-\frac{2}{x(x+1)}=\frac{5(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-4)}-\frac{3}{x(1+x)}$$

$C.E.: \quad x\neq 0; \quad x\neq -1; \quad x\neq -2; \quad x\neq +4$

$$\frac{1}{x(x-4)}-\frac{2}{x(x+1)}=\frac{5}{(x+1)(x-4)}-\frac{3}{x(1+x)}$$

$m.c.m. = x(x+1)(x-4)$

$$x+1-2(x-4)=5x-3(x-4)$$

$$x+1-2x+8=5x-3x+12$$

$$x-2x-5x+3x=12-1-8$$

$$-3x=3$$

$$3x=-3$$

$x=-1 \quad non\ \ accettabile$

Equazione impossibile.

4.d Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{a+x}{a^2-4a+4}-\frac{1}{a-3}=-\frac{x+3}{a^2-5a+6}$$

Soluzione

$$\frac{a+x}{(a-2)^2}-\frac{1}{a-3}=-\frac{x+3}{(a-2)(a-3)}$$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $\mathrm{C.E.}:\ a\neq 2\quad \mathrm{e}\quad a\neq 3$ (valori del parametro che fanno perdere di significato l'equazione).

Moltiplicando tutti i termini per il $\mathrm{m.c.m.}=(a-2)^2(a-3)$ si ottiene:

$$(a+x)(a-3)-(a-2)^2=-(a-2)(x+3)$$

$$a^2-3a+ax-3x-a^2-4+4a=-ax-3a+2x+6$$

$$ax-3x-4+4a=-ax+2x+6$$

$$ax-3x+ax-2x=4-4a+6$$

$$2ax-5x=10-4a$$

$$(2a-5)x=-2(2a-5)$$

Discussione

$Se\ \ 2a-5=0,$ cioè se $a=\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad 0x=0\qquad Equazione\ indeterminata\ .$

$Se\ \ 2a-5\neq 0,$ cioè se $a\neq\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{-2(2a-5)}{2a-5}=-2\qquad Equazione\ determinata\ .$

Riassumendo:

Parametro	Soluzione	Tipo di equazione
$a=2\ \vee\ a=3$	–	*Equazione che perde di significato*
$a=\frac{5}{2}$	*Infinite soluzioni*	*Equazione indeterminata*
$a\neq 2\ \wedge\ a\neq 3\ \wedge\ a\neq\frac{5}{2}$	$x=-2$	*Equazione determinata*

4.e Risolvi la seguente equazione:

$$1-\frac{5}{m+2}=\frac{1}{x}-\frac{2}{mx+2x}$$

Soluzione

$$1-\frac{5}{m+2}=\frac{1}{x}-\frac{2}{(m+2)x}$$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $C.E.:\ m\neq -2$ *(valori del parametro che fanno perdere di significato l'equazione).*

Le condizioni di accettabilità delle soluzioni sono: $C.A.:\ x\neq 0$ *(tali condizioni riguardano l'incognita; esse sono utilizzate nella fase finale della discussione per stabilire l'accettabilità delle soluzioni trovate).*

Moltiplichiamo tutti i termini per il $m.c.m.=(m+2)x$ *:*

$$(m+2)x-5x=m+2-2$$

$$(m-3)x=m$$

Discussione

$Se\ \ m-3=0, \quad cioè\ se \quad m=3 \qquad \Rightarrow \qquad 0x=3 \qquad\qquad Equazione\ impossibile\ .$

$Se\ \ m-3\neq 0, \quad cioè\ se \quad m\neq 3 \qquad \Rightarrow \qquad x=\dfrac{m}{m-3}$

Ma tale soluzione è accettabile se rispetta le condizioni di accettabilità: $C.A.: \ x\neq 0\ .$

$Pertanto \quad \dfrac{m}{m-3}\neq 0\ ; \quad m\neq 0$

Riassumendo

Parametro	Soluzione	Tipo di equazione
$m=-2$	–	*Equazione che perde di significato*
$m=0 \quad \vee \quad m=3$	*Nessuna soluzione*	*Equazione impossibile*
$m\neq -2 \quad \wedge \quad m\neq 0 \quad \wedge \quad m\neq 3$	$x=\dfrac{m}{m-3}$	*Equazione determinata*

5. Un treno A parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di $120\,\mathrm{km/h}$. Un'ora dopo dalla stessa stazione parte un treno B, che viaggia nella stessa direzione e verso alla velocità costante di $170\,\mathrm{km/h}$. Dopo quanto tempo (in ore e minuti) il treno B raggiunge il treno A ? A che distanza dalla stazione di partenza avviene il contatto ?

Soluzione

La condizione di accettabilità è: $t>0$.

Essendo il treno A partito un'ora prima, nell'istante in cui viene raggiunto dal treno A, sarà in viaggio da $t+1$ ore.

Ricordando che la velocità $v=\frac{s}{t}$ si ha che: $s=v\cdot t$

Nell'istante del raggiungimento i due treni hanno percorso le stesse distanze.

$s_A=s_B$

$v_A\cdot t_A=v_B\cdot t_B \qquad$ ma $\ t_A=t_B+1 \qquad \Rightarrow$

$120\cdot(t_B+1)=170\cdot t_B$

$120t_B+120=170\ t_B$

$50t_B=120$

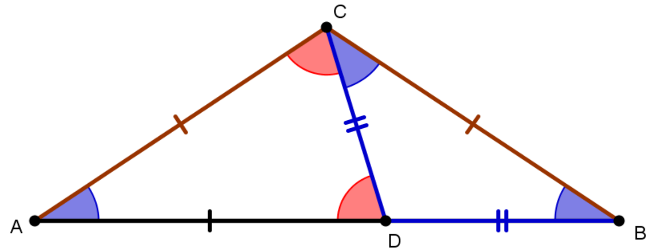
$t_B=\dfrac{120}{50}=2{,}4=2^h\ (0{,}4\cdot 60)^I=2^h\ 24^I$

Pertanto il treno B raggiunge il treno A dopo $2^h\ 24^I$.

Mentre il tempo di percorrenza del treno A è: $t_A=t_B+1=3^h\ 24^I$.

Il treno B raggiunge il treno A dopo un percorso $s_B=v_B\cdot t_B=170\ km/h\cdot 2{,}4\ h=408\ km$.

6. È dato un triangolo isoscele ABC, in cui $AC \cong BC$. Il punto D sul lato AB è tale che $AD \cong AC$ e $BD \cong CD$. Calcola la misura dell'angolo $A\widehat{C}B$.



Soluzione

Ponendo l'angolo $\widehat{A} = x \quad \Rightarrow \quad \widehat{B} = x \quad$ e $\quad B\widehat{C}D = x$

Nel triangolo ACD l'angolo:

$$A\widehat{C}D \cong A\widehat{D}C = \frac{180 - x}{2} = 90 - \frac{x}{2}$$

Mentre nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{C} = 180 - 2x$

D'altra parte, l'angolo $\widehat{C} \cong A\widehat{C}D + B\widehat{C}D$

Sostituendo le misure si ottiene:

$$180 - 2x = 90 - \frac{x}{2} + x$$

$$360 - 4x = 180 - x + 2x$$

$$-4x + x - 2x = 180 - 360$$

$$-5x = -180$$

$$5x = 180$$

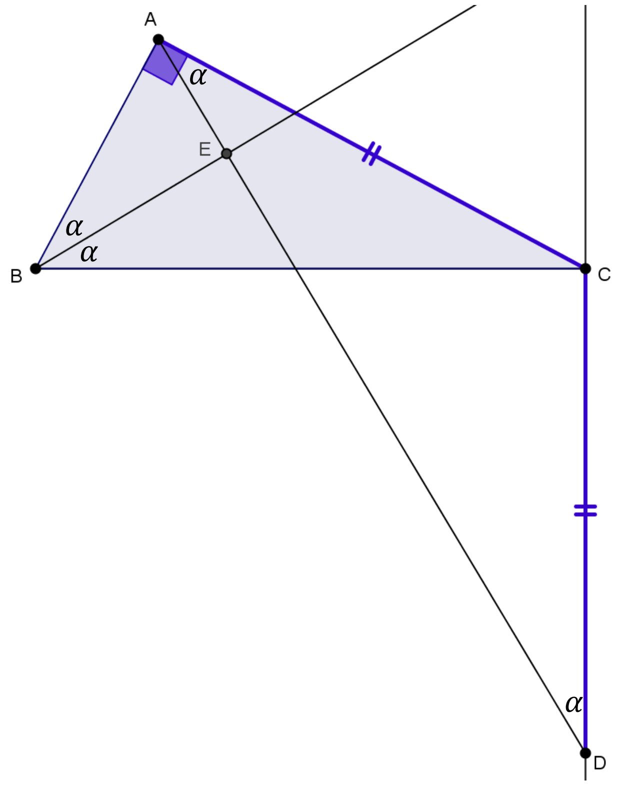
$$x = 36$$

Pertanto l'angolo $A\hat{C}B = 180 - 2x = 180 - 2 \cdot 36 = 108°$.

7. Dato un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, conduci per il vertice C la semiretta perpendicolare a BC che giace nel semipiano, avente come origine la retta BC, a cui non appartiene il vertice A. Sia D il punto della semiretta tale che $CD \cong AC$ ed E il punto di intersezione della retta AD con la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. Supposto $A\hat{B}C = 2\alpha$, esprimi in funzione di α le ampiezze:

   a. degli angoli dei triangoli ABC e ACD;

   b. degli angoli $E\hat{A}B$ e $A\hat{E}B$.



Soluzione a

Nel triangolo ABC, essendo l'angolo $\widehat{A}$, per ipotesi retto,

si ha che: $A\widehat{C}B = 90° - 2\alpha$

Nel triangolo ACD, essendo l'angolo $B\widehat{C}D$, per ipotesi retto,

si ha che: $A\widehat{C}D = 90° + (90° - 2\alpha) = 180° - 2\alpha$

Essendo il triangolo ACD isoscele,

si ha che: $A\widehat{D}C = \alpha$ e : $C\widehat{A}D = \alpha$

Soluzione b

Nel triangolo ABE l'angolo $E\widehat{A}B = 90° - \alpha$

Nel triangolo ABE l'angolo

$$A\widehat{E}B = 180° - E\widehat{A}B - E\widehat{B}A = 180° - (90° - \alpha) - \alpha =$$
$$= 180° - 90° + \alpha - \alpha = 90°$$