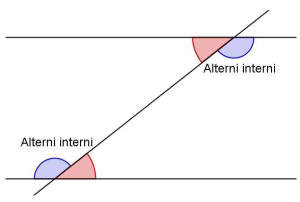
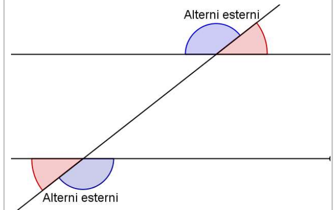
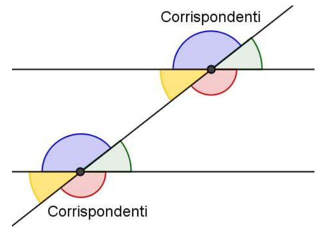
Formulario di geometria piana

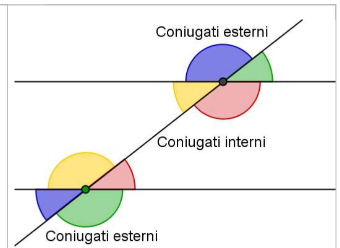
CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI Due triangoli sono congruenti se hanno:	ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso (I°) ordinatamente congruenti un lato e gli angoli ad essi adiacenti (II°) ordinatamente congruenti i tre lati (III°)

Criteri di parallelismo





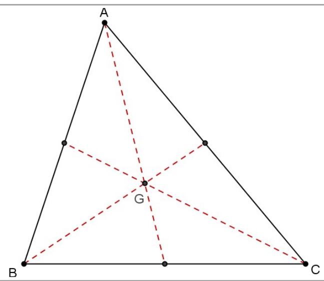


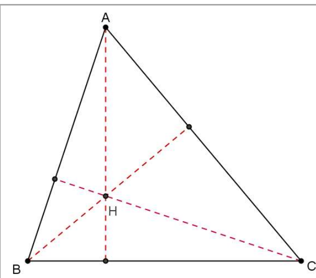


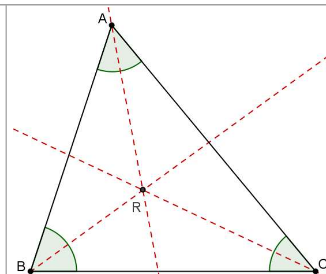
Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano parallele è che ogni trasversale formi con esse:	due angoli alterni interni (o esterni) congruenti *oppure* due angoli corrispondenti congruenti *oppure* due angoli coniugati interni (o esterni) supplementari

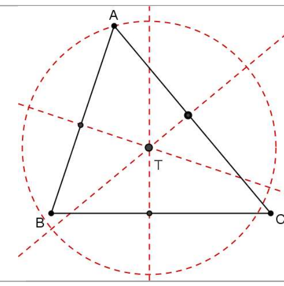
RETTE PERPENDICOLARI	RETTE PARALLELE
Si può dimostrare l'esistenza e l'unicità della retta passante per un punto P e perpendicolare ad una retta data.	Si può dimostrare l'esistenza, ma non l'unicità della retta passante per un punto P e parallela ad una retta. L'unicità della retta parallela viene assunta come postulato (assioma).

Triangolo









Il **baricentro** è il punto di incontro delle tre mediane di un triangolo.	L'**ortocentro** è il punto d'incontro delle tre altezze di un triangolo.	L'**incentro** è il punto di incontro delle tre bisettrici di un triangolo.	Il **circocentro** è il punto d'incontro dei tre assi di un triangolo.
Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti tali che quella con un estremo sul vertice è doppia dell'altra.	Il baricentro, l'ortocentro e il circocentro sono tre punti allineati.	In ogni triangolo il baricentro G, il circocentro T e l'ortocentro H sono tali che GH = 2·GT	In ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa.

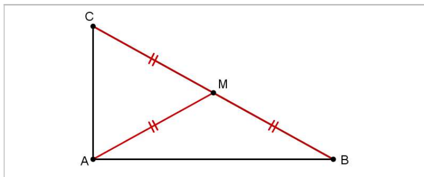
Proprietà e Teoremi

- In ogni triangolo il segmento congiungente i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.
- In un triangolo la somma di due lati qualsiasi è maggiore del terzo lato.
- In un triangolo la differenza di due lati qualsiasi è minore del terzo lato.
- La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.
- In un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti.
- La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è uguale a $n-2$ angoli piatti.
- La somma degli angoli esterni di un poligono convesso di n lati è congruente a 2 angoli piatti.
- Un poligono di n lati ha $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonali.
- Un triangolo si può sempre inscrivere o circoscrivere ad una circonferenza.
- Un poligono è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si incontrano nel centro della circonferenza.
- Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se le bisettrici degli angoli si incontrano nel centro della circonferenza.
- Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli angoli opposti sono supplementari.
- Un quadrilatero è circoscrivibile a una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.
- In ogni trapezio la congiungente i punti medi dei lati non paralleli è parallela alle basi e congruente alla loro semisomma.
- In ogni parallelogramma la somma dei quadrati delle lunghezze dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali.

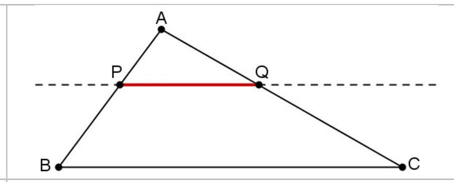
CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI Due triangoli sono simili se hanno:	gli angoli corrispondenti congruenti (I°)
	due lati direttamente proporzionali e gli angoli fra essi compresi congruenti (II°)
	i lati corrispondenti direttamente proporzionali (III°)

TEOREMI SULLA SIMILITUDINE	In due triangoli simili due lati corrispondenti sono proporzionali alle altezze che escono da due vertici corrispondenti.
	In due triangoli simili i perimetri sono proporzionali a due lati corrispondenti.
	In due triangoli simili il rapporto fra le aree è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure di due lati corrispondenti.
	In due triangoli simili il rapporto fra due diagonali che congiungono vertici corrispondenti è uguale al rapporto di due lati corrispondenti.

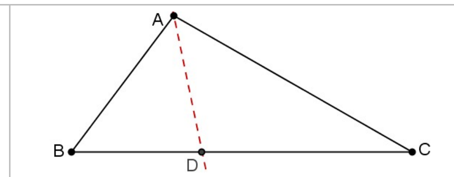
TEOREMA DI TALETE	Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, il rapporto fra due segmenti determinati su una trasversale è uguale al rapporto dei segmenti corrispondenti determinati sull'altra trasversale.



In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa. $AM = CM = MB$

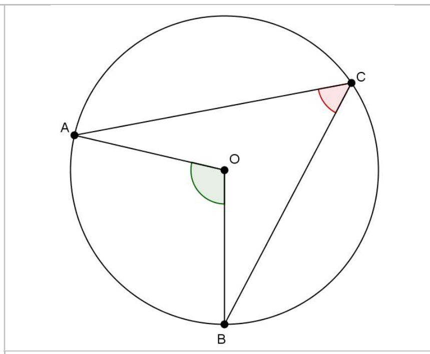


Se una retta parallela a un lato di un triangolo interseca gli altri due lati, li divide in segmenti proporzionali. $AP : PB = AQ : QC$

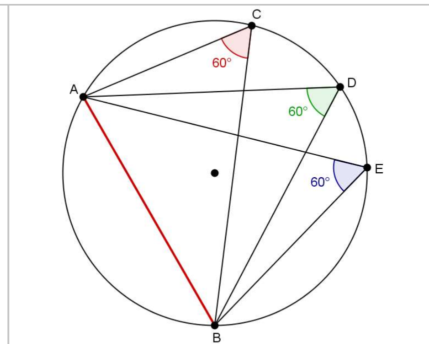


La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in segmenti proporzionali agli altri due lati. $BD : DC = AB : AC$

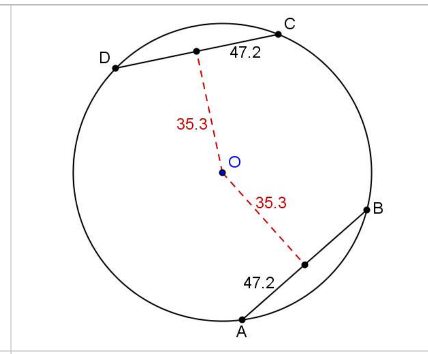
Angoli e corde



$$\boxed{A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B}$$

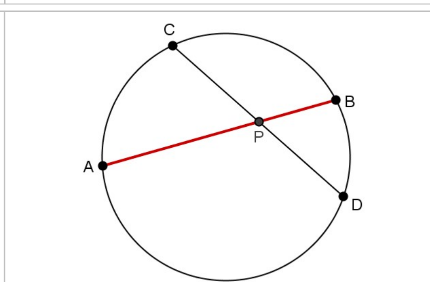


Angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda sono congruenti



In una circonferenza corde congruenti sono equidistanti dal centro.

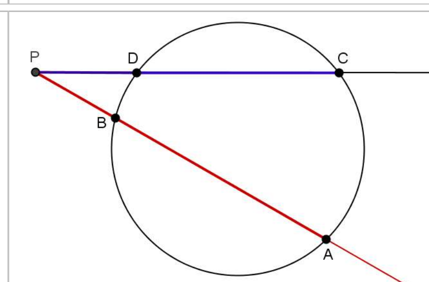
Teoremi



TEOREMA DELLE CORDE

Se due corde AB e CD di una circonferenza si intersecano in un punto P, il prodotto delle misure dei due segmenti in cui AB resta divisa da P è uguale al prodotto delle misure dei due segmenti in cui CD resta divisa da P.

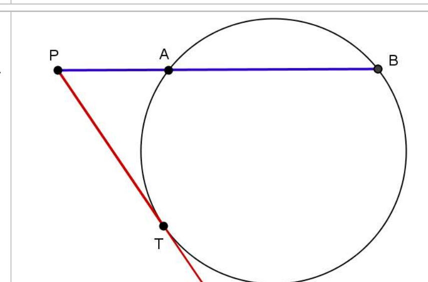
$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$



TEOREMA DELLE SECANTI

Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due semirette secanti, il prodotto delle misure dei due segmenti appartenenti ad una secante è uguale al prodotto delle misure dei due segmenti appartenenti all'altra secante.

$$PA \cdot PB = CP \cdot PD$$



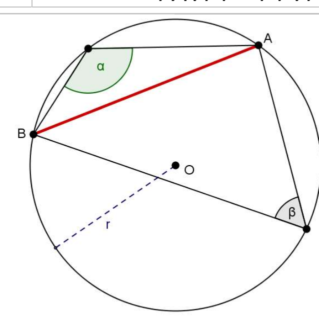
TEOREMA DELLA TANGENTE

Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono una semiretta secante e una semiretta tangente, il segmento di tangente, che ha per estremi questo punto e il punto di tangenza, è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.

$$PA : PT = PT : PB$$

Teorema della corda

$$\boxed{AB = 2\,r\,\sin\alpha = 2\,r\,\sin\beta}$$



Triangolo

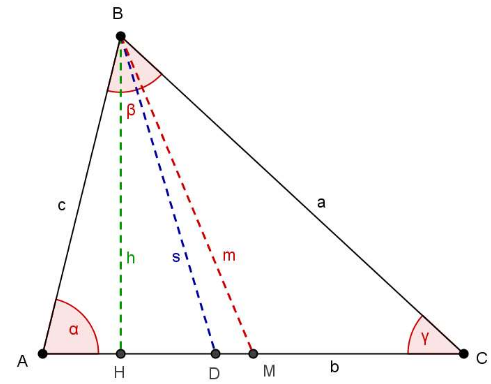
$\boxed{p=a+b+c}$ $\boxed{S=\frac{1}{2}b\cdot h}$ $\boxed{S=\frac{1}{2}b\cdot c\,sin\alpha}$

$\boxed{S=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{sin\beta\cdot sin\gamma}{sin\alpha}}$ $\boxed{\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}}$ $\boxed{b=a\,cos\gamma+c\,cos\alpha}$

$\boxed{S=\sqrt{\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{p}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{p}{2}-c\right)}}$ $\boxed{a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos\alpha}$

$$\boxed{bisettrice_\beta=\frac{2}{a+c}\sqrt{a\cdot c\cdot\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}-b\right)}=\frac{2\,a\cdot c\cdot cos\,\beta/2}{a+c}}$$

$$\boxed{mediana_b=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(a^2+c^2)-b^2}}$$

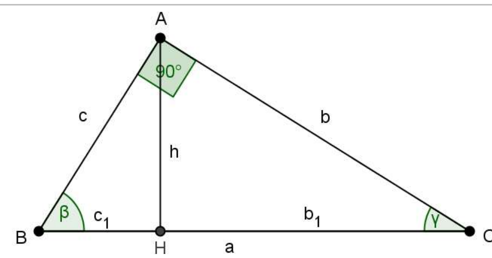


Triangolo rettangolo

$\boxed{sin\alpha=\frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}}$ $\boxed{c_1:c=c:a}$

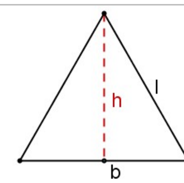
$\boxed{cos\alpha=\frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}}$ $\boxed{c_1:h=h:b_1}$ $\boxed{h=\frac{b\cdot c}{a}}$

$\boxed{tg\alpha=\frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}}$ $\boxed{a^2=b^2+c^2}$



Triangolo equilatero

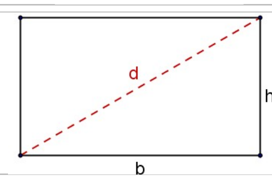
$\boxed{h=\frac{\sqrt{3}}{2}l}$ $\boxed{S=\frac{\sqrt{3}}{4}l}$



Rettangolo

$\boxed{p=2\cdot(b+h)}$ $\boxed{S=b\cdot h}$

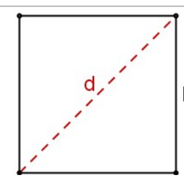
Le diagonali sono congruenti e si incontrano nel loro punto medio.



Quadrato

$\boxed{p=4\cdot l}$ $\boxed{S=l^2}$

Le diagonali sono congruenti, perpendicolari tra loro, si incontrano nel loro punto medio e sono bisettrici degli angoli interni



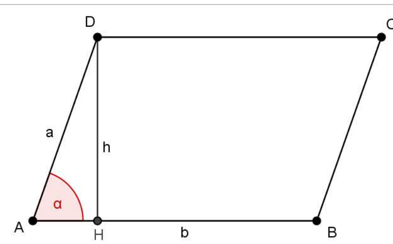
Parallelogrammo

$\boxed{S=b\cdot h}$ $\boxed{S=a\cdot b\cdot sin\alpha}$

Le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

Gli angoli opposti sono congruenti.

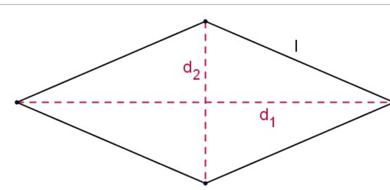
Gli angoli adiacenti sono supplementari.



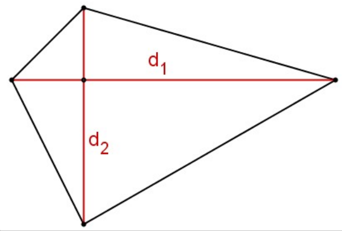
Rombo

$\boxed{p=4\cdot l}$ $\boxed{S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}}$

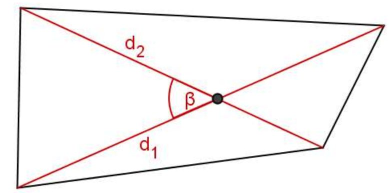
Le diagonali sono perpendicolari tra loro, si incontrano nel loro punto medio e sono bisettrici degli angoli interni



Quadrilatero



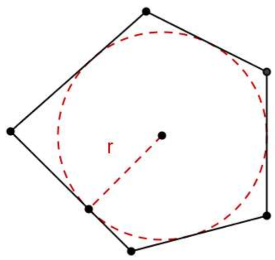
Diagonali perpendicolari $\boxed{S=\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}}$



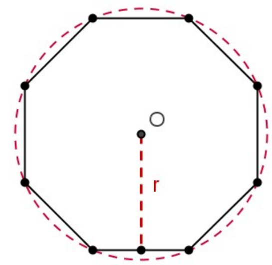
Diagonali non perpendicolari $\boxed{S=\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\beta}$

Poligono regolare

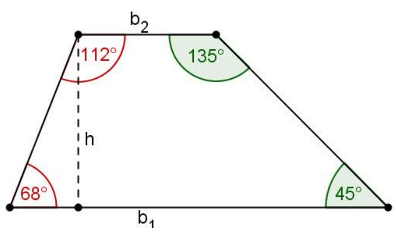
$\boxed{S=\dfrac{p \cdot a}{2}}$



$\boxed{S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} l^2}$

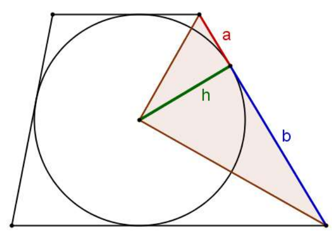


Trapezio

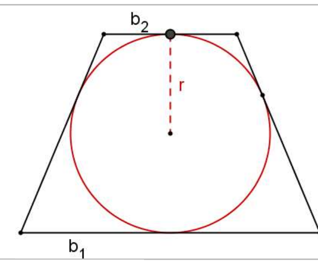


$\boxed{S=\dfrac{b_1+b_2}{2} \cdot h}$

Gli angoli adiacenti al lato obliquo sono supplementari.



$\boxed{a : r = r : b}$



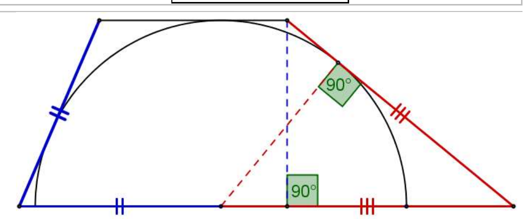
In un trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza il diametro è medio proporzionale fra le basi.

$\boxed{b_1 : 2r = 2r : b_2}$

Trapezio

In un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza :
i due segmenti in cui la base maggiore resta divisa dal centro della semicirconferenza sono congruenti ai lati obliqui adiacenti.

In un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza :
il lato obliquo è la metà della base maggiore.



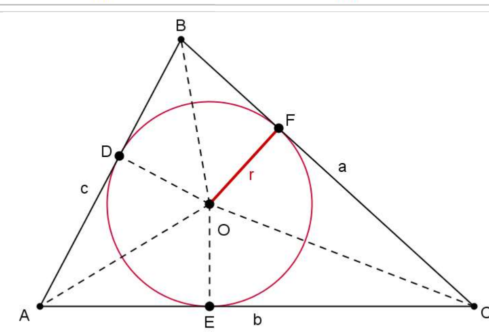
Triangolo circoscritto

$\boxed{r=\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{p}{2}-a\right)\cdot\left(\dfrac{p}{2}-b\right)\cdot\left(\dfrac{p}{2}-c\right)}{p/2}}}$

$\boxed{r=\dfrac{2S}{p}}$

$\boxed{r=\dfrac{(2l-b)b}{4h}\ T.isoscele}$

$\boxed{r=\dfrac{c_1+c_2-i}{2}\ T.equilatero}$



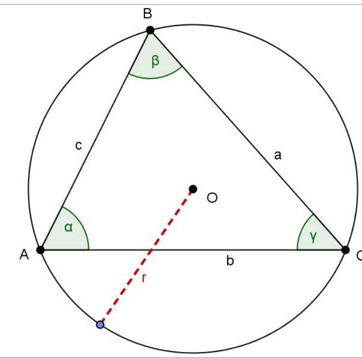
Triangolo inscritto

$$\boxed{r=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot\sqrt{\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{p}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{p}{2}-c\right)}}}$$

$$\boxed{r=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\,S}}$$

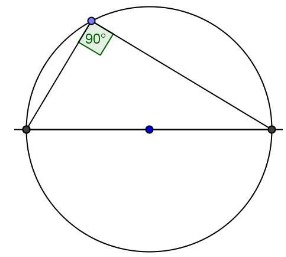
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\,r}$$

$$\boxed{r=\frac{l^2}{2h}\ \ T.isoscele}$$

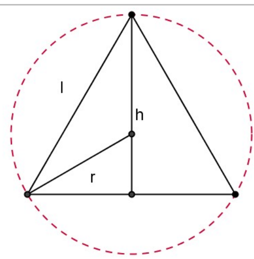


Triangolo inscritto

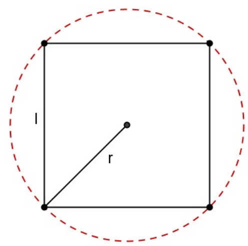
Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è un triangolo rettangolo.



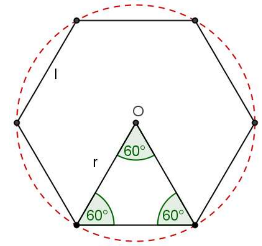
Poligoni regolari inscritti



$\boxed{l=r\sqrt{3}}$ $\boxed{h=\frac{\sqrt{3}}{2}l}$

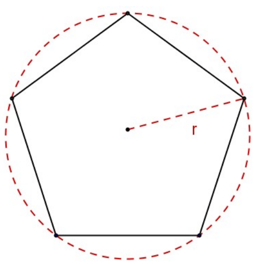


$\boxed{l=r\sqrt{2}}$

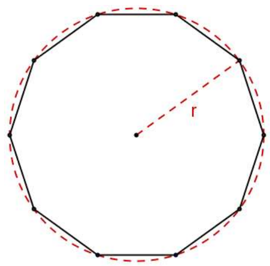


$\boxed{l=r}$

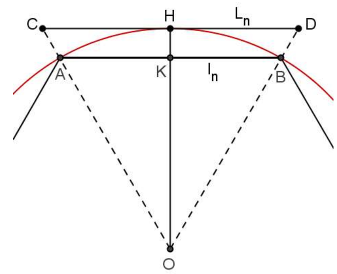
Poligoni regolari inscritti



$\boxed{l=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$



$\boxed{l=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r}$

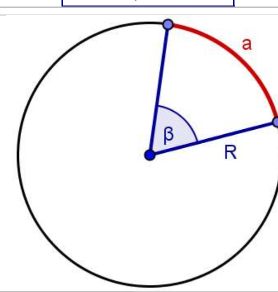


$$\boxed{L_n=\frac{l_n\cdot r}{\sqrt{r^2-\frac{l_n^2}{4}}}}$$

Circonferenza

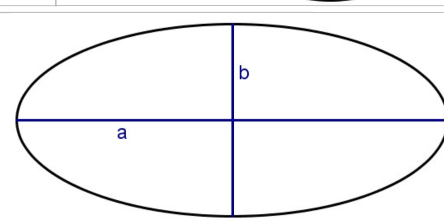
$\boxed{C=2\pi\,R}$ $\boxed{S=\pi\,R^2}$

$\boxed{a=\frac{2\pi\,R\beta°}{360}}$ $\boxed{S_{Settore}=\frac{a\cdot R}{2}}$

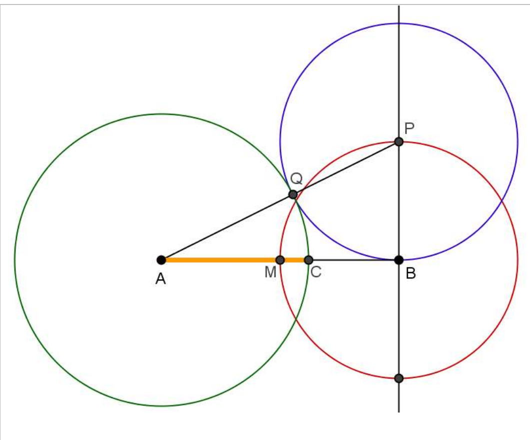


Ellisse

$\boxed{S=\pi\cdot a\cdot b}$



Sezione aurea



La **sezione aurea** di un segmento è la parte del segmento media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente. **AB : AC = AC : CB**

Costruzione

1. Retta PB perpendicolare ad AB
2. Punto medio M del segmento AB.
3. Circonferenza con centro in B passante per M. Si trova il punto P.
4. Circonferenza con centro in P passante per B. Si trova il punto Q
5. Circonferenza con centro in A passante per Q. Si trova il punto C
6. il segmento AC rappresenta la sezione aurea del segmento AB.

Dimostrazione

Ponendo AC = x e AB = m si ha:

$$m : x = x : (m - x)$$

Da cui si ottiene:

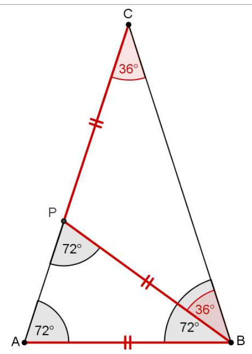
$$x^2 + mx - m^2 = 0$$

$$x = \frac{-m \mp m\sqrt{5}}{2}$$

Escludendo la soluzione negativa si ha:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot m \approx 0{,}62\, m$$

Triangolo aureo



Il **triangolo aureo** è un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36°.

Nel triangolo aureo la bisettrice di uno degli angoli alla base divide il lato opposto in due segmenti, tali che quello contenente il vertice del triangolo è la parte aurea del lato obliquo.

Dimostrazione

Gli angoli alla base A e B hanno un'ampiezza di 72°.

Costruendo la bisettrice BP, per il teorema della bisettrice si ha: AP : PC = AB : BC

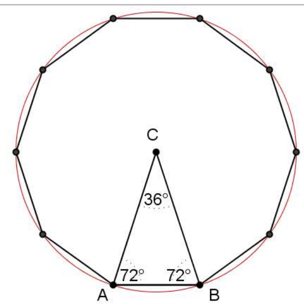
Sostituendo $AB \cong PB \cong PC$ e $BC \cong AC$ si ottiene: AP : PC = PC : AC

$\Leftrightarrow$ PC è la sezione aurea del lato obliquo AC.

Ma essendo $PC \cong AC$, si conclude che: AP : AC = AC : AC , cioè che:

la base AB è la sezione aurea del lato obliquo AC.

Decagono

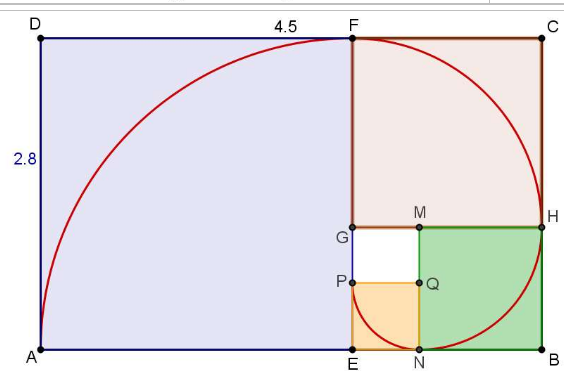


In un **decagono regolare**, il lato è congruente alla sezione aurea del raggio. Infatti tracciando i raggi dal centro ai vertici del poligono, si formano triangoli isosceli aurei.

Pertanto la misura del lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r è:

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r$$

Rettangolo aureo Spirale logaritmica



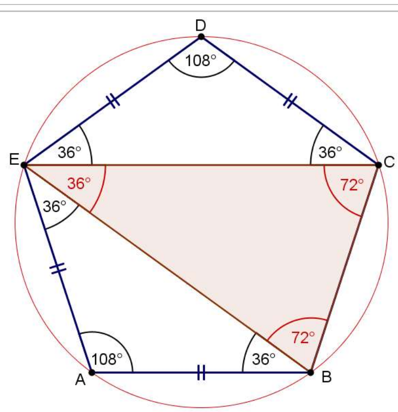
Il **rettangolo aureo** è un rettangolo avente un lato congruente alla sezione aurea dell'altro (2,8 : 4,5 = 0,62).

Se sul lato minore AD di un rettangolo aureo ABCD si costruisce il quadrato AEFD, interno al rettangolo, si ottiene il rettangolo EBCF che risulta ancora aureo.

Nel rettangolo EBCF è possibile costruire un quadrato di lato FC ottenendo così un nuovo rettangolo aureo e così via…

Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza, si ottiene una curva a forma di spirale, detta **spirale logaritmica**, o anche spirale d'oro.

Pentagono aureo



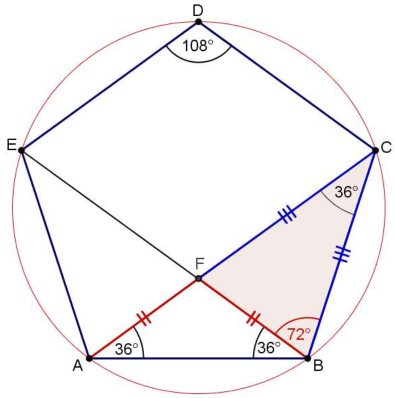
PENTAGONO AUREO

L'ampiezza degli angoli interni di un pentagono regolare è 108°.

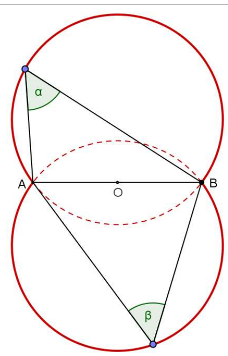
I triangoli ABE e CDE sono isosceli. Pertanto gli angoli alla base misurano 36°.

Gli angoli del triangolo BCE misurano 72°, 72° e 36°. Pertanto il triangolo BCE è un triangolo aureo. Si conclude quindi che:

In un pentagono regolare, il lato è congruente alla sezione aurea delle diagonali.

Pentagono aureo		**PENTAGONO AUREO** Gli angoli del triangolo BCF misurano 72°, 72° e 36°. Pertanto il triangolo BCF è un triangolo aureo. Quindi la base BF è la sezione aurea di FC. Ma BF ≅ AF ⇒ AF è la sezione aurea di FC ⇔ **In un pentagono regolare, due diagonali si dividono in segmenti tali che il minore è congruente alla sezione aurea del maggiore.**

Numero d'oro	Il rapporto tra la misura di un segmento e la misura della sua sezione aurea si chiama **rapporto aureo** o **numero d'oro** e si indica con la lettere greca $\boldsymbol{\varphi}$. $\varphi = \dfrac{m}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot m} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}61803$
	Il numero d'oro $\boldsymbol{\varphi}$ compare in svariati contesti, non solo geometrici, ma anche artistici e architettonici. In geometria è: - il rapporto tra la diagonale e il lato di un pentagono regolare - il rapporto in cui restano divise le diagonali di un pentagono regolare - la misura del raggio del cerchio circoscritto a un decagono regolare il cui lato misura 1. In algebra, il numero d'oro interviene nello studio della cosiddetta successione di Fibonacci: una successione di numeri, i cui primi due sono 1 e 1, mentre i successivi si ottengono sommando fra di loro i due precedenti numeri. 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21, 13+21=34, … Il rapporto tra un termine della successione di Fibonacci e quello che lo precede si avvicina sempre più a $\boldsymbol{\varphi}$ al crescere dei termini della successione (34:21=1,619). Nell'uomo: l'ombelico è posto a un'altezza che è, con buona approssimazione, in rapporto aureo con quella dell'individuo.

Luogo di punti		**Luogo dei punti che vedono un segmento sotto un dato angolo** Il luogo dei punti del piano che vedono un segmento AB sotto un dato angolo α è costituito da due archi di circonferenza, aventi AB come corda, simmetrici rispetto alla retta AB.

Formulario di geometria solida

SOLIDO	SUPERFICIE LATERALE	SUPERFICIE TOTALE	VOLUME
Prisma retto	$S_L = p \cdot h$	$S_T = S_L + 2S_B$	$V = S_B \cdot h$
Parallelepipedo	$S_L = p \cdot h$	$S_T = S_L + 2S_B$	$V = S_B \cdot h$
Cubo	$S_L = 4 \cdot l^2$	$S_T = 6 \cdot l^2$	$V = l^3$
Cilindro	$S_L = 2\pi \cdot r \cdot h$	$S_T = S_L + 2S_B$	$V = \pi\, r^2 \cdot h$
Piramide	$S_L = \frac{p \cdot a}{2}$	$S_T = S_L + S_B$	$V = \frac{1}{3} S_B \cdot h$
Cono	$S_L = 2\pi\, r \cdot a$	$S_T = S_L + S_B$	$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 \cdot h$
Tronco di piramide	$S_L = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot a$	$S_T = S_L + S_{B_1} + S_{B_2}$	$V = \frac{1}{3} h \cdot \left(S_{B_1} + S_{B_2} + \sqrt{S_{B_1} \cdot S_{B_2}}\right)$
Tronco di cono	$S_L = \pi \cdot a \cdot (r_1 + r_2)$	$S_T = S_L + S_{B_1} + S_{B_2}$	$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2)$
Sfera		$S_T = 4\pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$
Calotta sferica **Segmento sferico a una base**		$S_{Calotta} = 2\pi\, r \cdot h$	$V_{Segmento\ 1\ base} = \pi\, h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$
Calotta sferica **Segmento sferico a due basi**		$S_{Calotta} = 2\pi\, r \cdot h$	$V_{Segmento\ 2\ basi} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$
Fuso e spicchio sferico		$S = \frac{2\pi\, r^2 \cdot \alpha°}{90}$	$V = \frac{\pi\, r^3 \cdot \alpha°}{270}$
Tetraedro	$r_i = \frac{l\sqrt{6}}{12}$ $R_c = \frac{l\sqrt{6}}{4}$	$S = l^2\sqrt{3}$	$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$
Ottaedro	$r_i = \frac{l\sqrt{6}}{6}$ $R_c = \frac{l\sqrt{2}}{2}$	$S = 2l^2\sqrt{3}$	$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{3}$