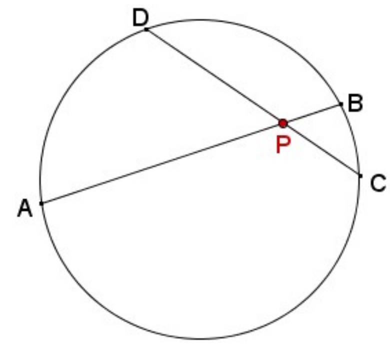
TEOREMI DELLE CORDE, DELLE SECANTI E DELLA TANGENTE

Esempio 1



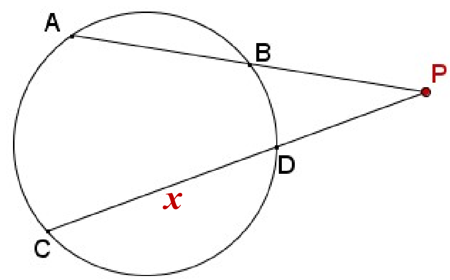
In una circonferenza sono date due corde AB e CD, che si incontrano in P. Sapendo che $\overline{PA} = 6\,cm$, $\overline{PB} = 2\,cm$, $\overline{PC} = 4\,cm$, determina la lunghezza di PD.

Soluzione

Applicando il T. delle Corde si ha:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ $\quad$ $6 \cdot 2 = 4 \cdot \overline{PD}$ $\quad$ $\overline{PD} = 3\,cm$.

Esempio 2



Da un punto P esterno ad una circonferenza sono condotte le due rette secanti (come in figura). Sapendo che $\overline{AB} = 6\,cm$, $\overline{PB} = 10\,cm$, $\overline{PD} = 8\,cm$, determina la lunghezza di CD.

Soluzione

$\overline{PA} = \overline{AB} + \overline{PB} = (6 + 10)\,cm = 16\,cm$.

Poniamo $\overline{CD} = x$, con $x \in R^+$.

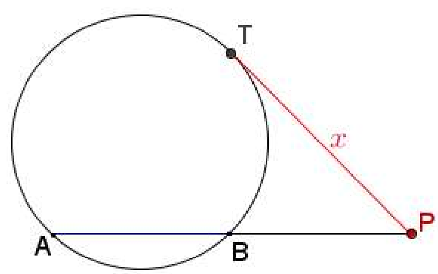
$\overline{PC} = \overline{PD} + \overline{CD} = (8 + x)\,cm$.

Applicando il T. delle Secanti si ha:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$; $\quad$ $16 \cdot 10 = (8 + x) \cdot 8$; $\quad$ $160 = 64 + 8x$;

$8x = 96$; $\quad$ $x = 12$; $\quad$ $\overline{CD} = 12\,cm$.

Esempio 3



Da un punto P esterno ad una circonferenza sono condotte una retta tangente in T alla circonferenza e una retta secante (come in figura). Sapendo che $\overline{AB} = 16\,cm$, $\overline{PB} = 9\,cm$, determina la lunghezza di PT.

Soluzione

$\overline{PA} = \overline{AB} + \overline{PB} = (16 + 9)\,cm = 25\,cm$.

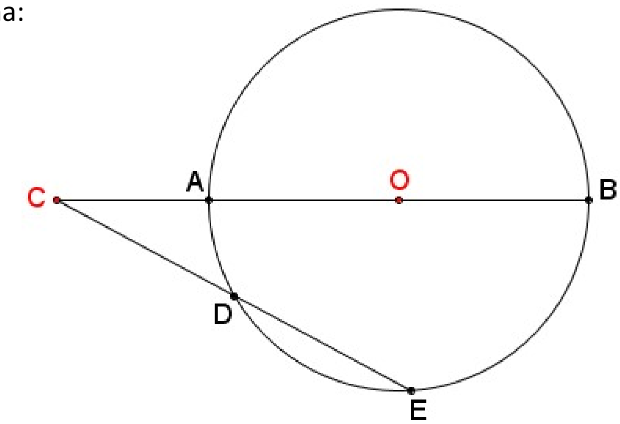
Applicando il T. della secante e della tangente si ha:

$PT^2 = PA \cdot PB$; $\quad$ $PT^2 = 25 \cdot 9$; $\quad$ $PT^2 = 225$;

$\overline{PT} = 15\,cm$.

È data una circonferenza di centro O e diametro AB. Sul prolungamento di AB, dalla parte di A, considera un punto C tale che $\overline{CA} = a$. Da un punto C traccia una secante che incontra la circonferenza in D e in E $(CD < CE)$. Sapendo che $\overline{CD} = 2a$ e $\overline{DE} = 2a$, determina:

a. la misura del raggio della circonferenza;
b. l'area del triangolo DOE;
c. l'area del triangolo ACD.



Soluzione a

Applicando il T. delle Secanti si ha:

$CA \cdot CB = CD \cdot CE \qquad a \cdot \overline{CB} = 2a \cdot 4a \qquad \overline{CB} = 8a$.

$$r = \overline{AO} = \frac{\overline{CB} - \overline{CA}}{2} = \frac{8a - a}{2} = \frac{7}{2}a.$$

Soluzione b

Tracciamo l'altezza OH del triangolo DOE.

Essendo il triangolo DOE isoscele sulla base DE si ha: $\overline{HE} = \frac{1}{2}\,\overline{DE} = a$.

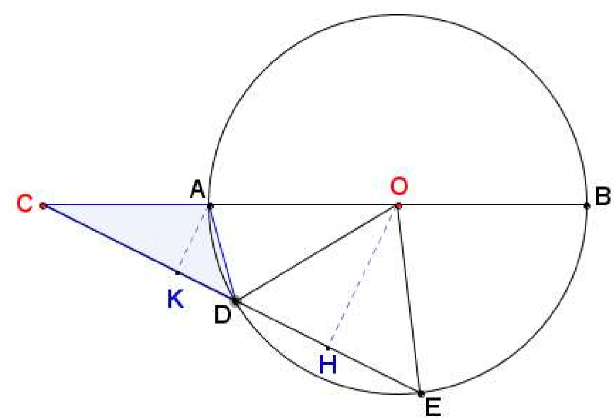
Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo OHE si ha:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{HE}^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}a\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{49}{4}a^2 - a^2} = \sqrt{\frac{45}{4}a^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}\,a.$$

Pertanto l'area del triangolo DOE è:

$$S_{DOE} = \frac{\overline{DE} \cdot \overline{OH}}{2} = \frac{2a \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}\,a}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}\,a^2.$$

Soluzione c



Tracciamo l'altezza AK del triangolo ACD.

I triangoli ACK e OCH sono simili per il 1° Criterio di Similitudine dei Triangoli. Infatti:

L'angolo $\hat{C}$ *è in comune.*

Gli angoli $A\widehat{K}C \cong O\widehat{H}C$ *perché entrambi angoli retti.*

Pertanto i due triangoli hanno i lati corrispondenti proporzionali.

$AK : OH = CA : CO; \qquad \overline{AK} : \frac{3}{2}\sqrt{5}\,a = a : \frac{9}{2}a$

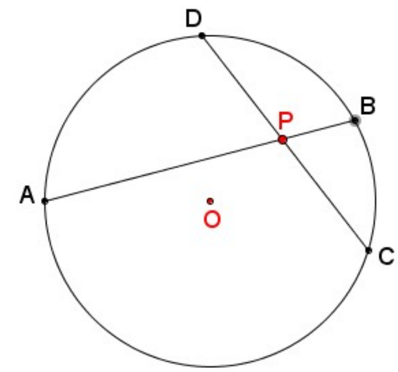
$$\overline{AK} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}\,a \cdot a}{\frac{9}{2}a} = \frac{\sqrt{5}}{3}a$$

Pertanto l'area del triangolo ACD è:

$$S_{ACD} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AK}}{2} = \frac{2a \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,a^2.$$

Problema 487.232

In una circonferenza di centro O, è data una corda AB, la quale passa per il punto medio P di una corda CD. Sapendo che $\overline{PA} = 16a$ e $\overline{PB} = 4a$, determina la misura di CD.



Soluzione

Poniamo $\overline{PC} = \overline{PD} = x$, con $x \in R^+$.

Applicando il T. delle Corde si ha:

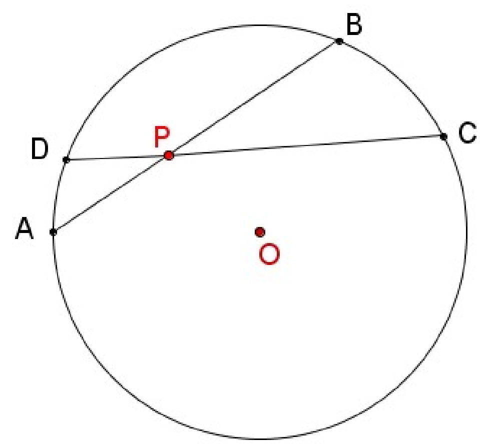
$PA \cdot PB = PC \cdot PD \qquad 16a \cdot 4a = x \cdot x \qquad x^2 = 64a^2$

$x = 8a$.

Pertanto $\overline{CD} = \overline{PC} + \overline{PD} = 16a$.

Problema 487.233

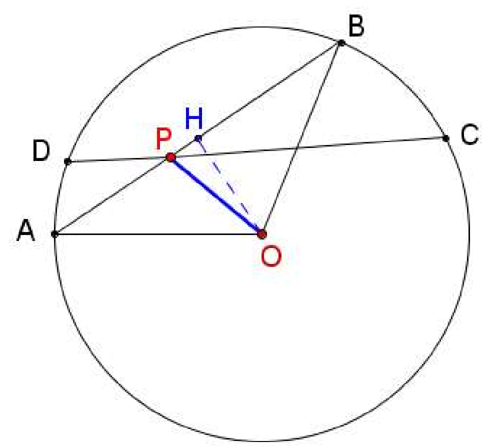
In una circonferenza di centro O e raggio di lunghezza $12\ cm$, sono date due corde AB e CD, che si incontrano in P. Sapendo che $\overline{AP} = 8\ cm$, $\overline{PB} = 12\ cm$, $\overline{PD} = 6\ cm$, determina le lunghezze di PC e di PO.



Soluzione

Applicando il T. delle Corde si ha:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD \qquad 8 \cdot 12 = \overline{PC} \cdot 6 \qquad \overline{PC} = 16\ cm$.



Congiungiamo il centro O della circonferenza con i punti A e B.

$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{AB} = (8 + 12)\ cm = 20\ cm$.

Tracciamo l'altezza OH del triangolo isoscele ABO.

Essendo ABO un triangolo isoscele sulla base AB si ha:

$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 10\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo AHO si ha:

$\overline{OH} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(12\ cm)^2 - (10\ cm)^2} =$

$= \sqrt{44\ cm^2} = 2\sqrt{11}\ cm$.

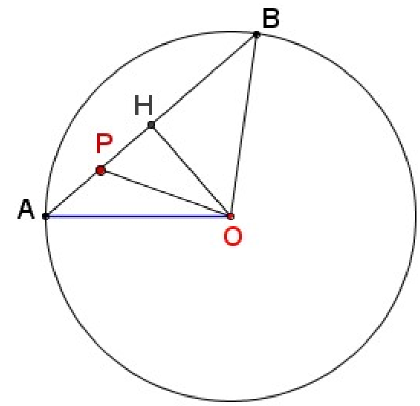
Il segmentino PH misura: $\overline{PH} = \overline{AH} - \overline{AP} = (10 - 8)\ cm = 2\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo PHO si ha:

$\overline{PO} = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{11}\ cm\right)^2 + (2\ cm)^2} = \sqrt{44\ cm^2 + 4\ cm^2} = \sqrt{48\ cm^2} = 4\sqrt{3}\ cm$.

Problema 487.234

In una circonferenza di centro O, una corda AB misura 2a. Sia P il punto della corda AB tale che $AP \cong \frac{1}{4}AB$. Sapendo che $OP \cong \frac{3}{4}AB$, determina la misura del raggio della circonferenza.



Soluzione

$$\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{4} \cdot 2a = \frac{1}{2}a\,.$$

$$\overline{OP} = \frac{3}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4} \cdot 2a = \frac{3}{2}a\,.$$

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 2a = a\,.$$

$$\overline{PH} = \overline{AH} - \overline{AP} = \frac{1}{2}a\,.$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo PHO si ha:

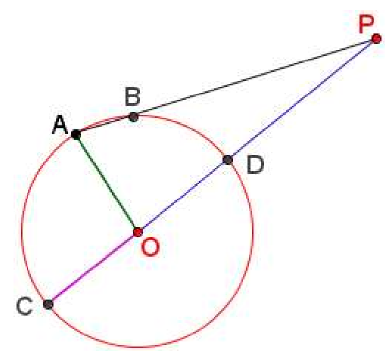
$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{8}{4}a^2} = \sqrt{2}\,a\,.$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo AHO si ha:

$$\overline{AO} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{2}\,a\right)^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a\,.$$

Problema 487.235

È data una circonferenza di centro O e raggio r. Un punto P, esterno alla circonferenza, ha distanza da O uguale a $3r$. Da P viene condotta una secante, che incontra la circonferenza in A e in B $(PA > PB)$. Sapendo che $\overline{AB} = \frac{r}{3}$, determina la misura di PA.



Soluzione

$$\overline{PD} = \overline{PO} - \overline{DO} = 3r - r = 2r$$

$$\overline{PC} = \overline{PO} - \overline{CO} = 3r + r = 4r$$

Poniamo $\overline{PB} = x$ con $x \in R^+$

$$\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{AB} = x + \frac{r}{3}$$

Applicando il T. delle Secanti si ha:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD\,;$ $\quad \left(x + \frac{r}{3}\right) \cdot x = 4r \cdot 2r\,;$ $\quad x^2 + \frac{r}{3}x - 8r^2 = 0\,;$

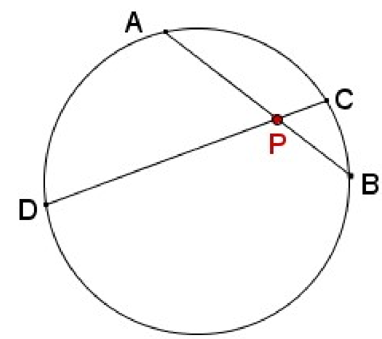
$3x^2 + rx - 24r^2 = 0\,;$ $\quad \Delta = r^2 + 288r^2 = 289r^2$

$$x_{1,2} = \frac{-r \mp \sqrt{289r^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-r \mp 17\,r}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-r - 17\,r}{6} = -3r \quad \color{red}{Non\ \ accettabile} \\ x_2 = \dfrac{-r + 17\,r}{6} = \dfrac{8}{3}r \end{cases}$$

Pertanto $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{AB} = \frac{8}{3}r + \frac{r}{3} = 3r$

Problema 487.236

In una una circonferenza sono date due corde AB e CD, che si intersecano in P. Sapendo che $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{13}{4}\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{CP}} = \frac{1}{2}\mathrm{a}$ e $\overline{\mathrm{PD}} = \frac{9}{2}\mathrm{a}$, determina le misure dei due segmenti in cui P divide AB.



Soluzione

Poniamo $\overline{PB} = x$ con $x \in R^+$

$\overline{PA} = \overline{AB} - \overline{PB} = \dfrac{13}{4}\mathrm{a} - x$

Applicando il T. delle Corde si ha:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ $\qquad \left(\dfrac{13}{4}\mathrm{a} - x\right) \cdot x = \dfrac{1}{2}\mathrm{a} \cdot \dfrac{9}{2}\mathrm{a}$ $\qquad \dfrac{13}{4}\mathrm{a}x - x^2 - \dfrac{9}{4}\mathrm{a}^2 = 0$

$13\mathrm{a}x - 4x^2 - 9\mathrm{a}^2 = 0$ $\qquad 4x^2 - 13\mathrm{a}x + 9\mathrm{a}^2 = 0$ $\qquad \Delta = 169a^2 - 144a^2 = 25a^2$

$$x_{1,2} = \frac{13a \mp \sqrt{25a^2}}{2 \cdot 4} = \frac{13a \mp 5a}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{13a - 5a}{8} = a \\ x_2 = \dfrac{13a - 5a}{8} = \dfrac{9}{4}a \end{cases}$$

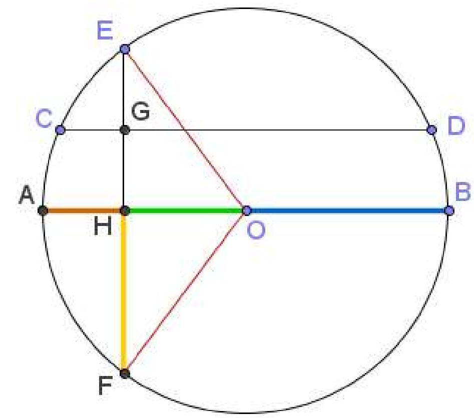
Pertanto $\overline{PB} = a$ e $\overline{PA} = \overline{AB} - \overline{PB} = \frac{13}{4}\mathrm{a} - a = \frac{9}{4}a$

Oppure

Pertanto $\overline{PB} = \frac{9}{4}a$ e $\overline{PA} = \overline{AB} - \overline{PB} = \frac{13}{4}\mathrm{a} - \frac{9}{4}a = a$

Problema 487.237

È data una circonferenza di diametro AB e raggio r. Una corda CD è parallela ad AB ($AC < AD$), una corda EF, perpendicolare ad AB, incontra CD in G. La distanza della corda EF da O è $\frac{3}{5}r$. Quale deve essere la distanza della corda CD da O, affinchè risulti $\overline{GC} \cdot \overline{GD} = \frac{3}{5}r^2$.



Soluzione

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo EHO si ha:

$$\overline{EH} = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3}{5}r\right)^2} = \sqrt{\frac{25-9}{25}r^2} = \frac{4}{5}r$$

Poniamo $\overline{GH} = x$ con $x \in R^+$.

Si ottiene: $\overline{GE} = \frac{4}{5}r - x$ e $\overline{GF} = \frac{4}{5}r + x$

Applicando il T. delle Corde si ha:

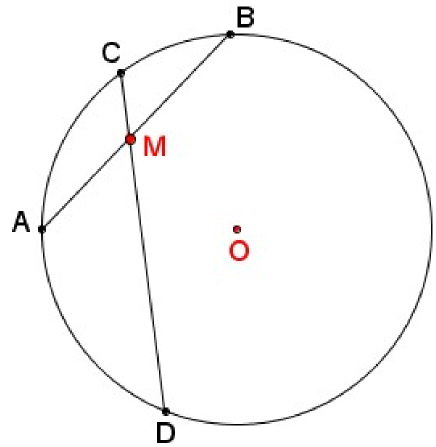
$\overline{GE} \cdot \overline{GF} = \overline{GC} \cdot \overline{GD}$ $\qquad \left(\dfrac{4}{5}r - x\right) \cdot \left(\dfrac{4}{5}r + x\right) = \dfrac{4}{5}r^2$ $\qquad \dfrac{16}{25}r^2 - x^2 = \dfrac{3}{5}r^2$

$x^2 = \dfrac{16}{25}r^2 - \dfrac{3}{5}r^2$ $\qquad x^2 = \dfrac{16-15}{25}r^2$ $\qquad x^2 = \dfrac{r^2}{25}$ $\qquad x = \mp\dfrac{r}{5}$.

Pertanto $\overline{GH} = \frac{r}{5}$.

Problema 487.238

Una corda AB di una circonferenza misura a e una corda CD della stessa circonferenza, distinta dalla corda AB, passa per il punto medio M di AB. Sapendo che $\overline{DM} + 3\,\overline{CM} = 2a$, determina la misura di CD.



Soluzione

Indichiamo: $\overline{DM} = x$ e $\overline{CM} = y$ con $x,\ y \in R^+$.

La relazione si traduce in:

$x + 3y = 2a$.

Applicando il T. delle Corde si ha:

$DM \cdot CM = AM \cdot BM \qquad x \cdot y = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \qquad xy = \frac{1}{4}a^2$.

Risoviamo il sistema formato da queste due equazioni in x e y.

$$\begin{cases} x + 3y = 2a \\ xy = \frac{1}{4}a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2a - 3y \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ (2a - 3y)y = \frac{1}{4}a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 2ay - 3y^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 8ay - 12y^2 - a^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 12y^2 - 8ay + a^2 = 0 \end{cases} \qquad \frac{\Delta}{4} = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2$$

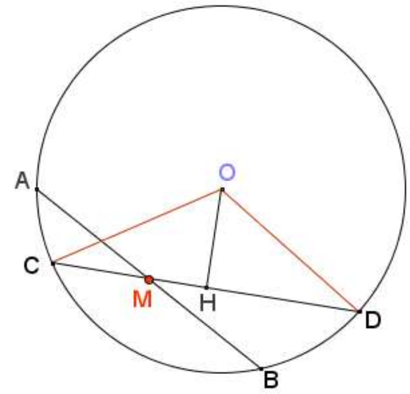
$$\begin{cases} - \\ y_{1,2} = \frac{4a \mp \sqrt{4a^2}}{12} = \frac{4a \mp 4a}{12} = \end{cases} \begin{matrix} y_1 = \frac{4a - 2a}{12} = \frac{2a}{12} = \frac{a}{6} \\ \\ y_2 = \frac{4a + 2a}{12} = \frac{6a}{12} = \frac{a}{2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \begin{cases} x_1 = 2a - 3 \cdot \frac{a}{6} = \frac{3}{2}a \\ y_1 = \frac{a}{6} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_2 = 2a - 3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a \\ y_2 = \frac{a}{2} \end{cases} \quad \textit{Non Accettabile} \end{matrix}$$

Pertanto si ottiene:

$\overline{CD} = \overline{DM} + \overline{CM} = \frac{3}{2}a + \frac{a}{6} = \frac{9+1}{6}a = \frac{10}{6}a = \frac{5}{3}a$.

La soluzione $\overline{DM} = \frac{a}{2}$ $\quad \overline{CM} = \frac{a}{2}$ non è accettabile perché risulterebbe non distinta dalla corda AB.

In una circonferenza di centro O e raggio r, considera una corda AB, di lunghezza uguale al lato di un quadrato inscritto nella circonferenza. Una corda CD, passante per il punto medio M di AB, è tale che $\overline{MD} = 2\,\overline{CM}$. Determina la distanza della corda CD dal centro della circonferenza.



Soluzione

Il lato di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è $l = \sqrt{2}\,r$.

Pertanto $\overline{AB} = \sqrt{2}\,r$ e $\overline{MA} = \overline{MB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,r$

Indichiamo: $\overline{MC} = x$ con $x \in R^+$.

Si ottiene: $\overline{MD} = 2x$.

Applicando il T. delle Corde si ha:

$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} r \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} r = x \cdot 2x$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2} r^2 = 2x^2$

$x^2 = \frac{1}{4} r^2$ $\qquad$ $x = \mp \frac{1}{2} r$.

Pertanto $\overline{MC} = \frac{1}{2} r$ e $\overline{MD} = r$

$$\overline{CD} = \overline{MC} + \overline{MD} = \frac{1}{2} r + r = \frac{3}{2} r .$$

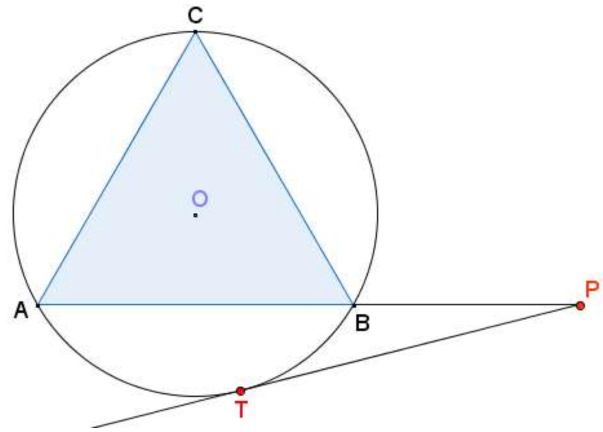
$$\overline{HD} = \frac{1}{2}\,\overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} r = \frac{3}{4} r .$$

La distanza della corda CD dal centro della circonferenza è:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{HD}^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3}{4} r\right)^2} = \sqrt{\frac{16-9}{16} r^2} = \sqrt{\frac{7}{16} r^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} r .$$

Problema 487.240

Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r. Considera un punto P, sul prolungamento di AB dalla parte di B, e traccia una semiretta di origine P tangente alla circonferenza, indicando con T il punto di contatto. Determina la distanza di P da B, in modo che la lunghezza del sgmento PT sia uguale a quella del lato di un quadrato inscritto nella circonferenza.



Soluzione

Il lato di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è $l = \sqrt{2}\, r$.

Il lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r è $l = \sqrt{3}\, r$.

Indichiamo: $\overline{PB} = x$ con $x \epsilon R^+$.

Si ottiene: $\overline{PA} = \sqrt{3}\, r + x$.

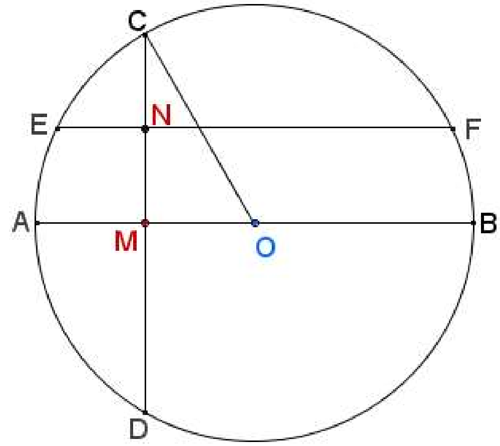
Applicando il T. della tangente si ha:

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$ $\qquad$ $\left(\sqrt{3}\, r + x\right) \cdot x = \left(\sqrt{2}\, r\right)^2$ $\qquad$ $x^2 + \sqrt{3}r\, x - 2r^2 = 0$

$\Delta = 3r^2 + 8r^2 = 11\, r^2$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3}r \mp \sqrt{11\, r^2}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}\, r - \sqrt{11}\, r}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}\, r & \color{red}{\textit{Non accettabile}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-\sqrt{3}\, r + \sqrt{11}\, r}{2} = \dfrac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}\, r & \textit{Accettabile} \end{cases}$$

È data una circonferenza di diametro AB, centro O e raggio r. Sia CD la corda, perpendicolare ad AB, passante per il punto medio M di AO, ed EF la corda, perpendicolare a CD, passante per il punto medio N di CM. Determina le misure dei due segmenti in cui EF resta divisa da N.



Soluzione

$\overline{MO} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AO} = \frac{1}{2} r$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo CMO si ha:

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \, .$$

$\overline{DM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ $\qquad$ $\overline{CN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{4} r$ $\qquad$ $\overline{MN} = \overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{4} r$.

$$\overline{DN} = \overline{DM} + \overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2} r + \frac{\sqrt{3}}{4} r = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} r = \frac{3}{4} \sqrt{3} \, r \, .$$

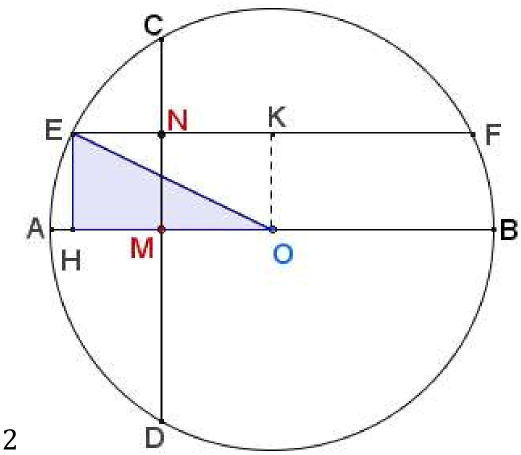
Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo EKO si ha:

$$\overline{EK} = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{KO}^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} r\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{3}{16} r^2} = \sqrt{\frac{13}{16} r^2} = \frac{\sqrt{13}}{4} r \, .$$

$$\overline{EF} = 2 \cdot \overline{EK} = 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} r = \frac{\sqrt{13}}{2} r$$

Poniamo $\overline{EN} = x \, , \; x \in R^+$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ $\overline{FN} = \frac{\sqrt{13}}{2} r - x$

Applicando il T. delle secanti si ha:



$\overline{CN} \cdot \overline{DN} = \overline{EN} \cdot \overline{FN}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{4} r \cdot \frac{3}{4} \sqrt{3} \, r = x \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{2} r - x \right)$

$\frac{9}{16} r^2 = \frac{\sqrt{13}}{2} r \, x - x^2$ $\qquad$ $x^2 - \frac{\sqrt{13}}{2} r \, x + \frac{9}{16} r^2 = 0$

$$\Delta = \frac{13}{4} r^2 - 4 \cdot \frac{9}{16} r^2 = \frac{13}{4} r^2 - \frac{9}{4} r^2 = \frac{4}{4} r^2 = r^2$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2} r \mp \sqrt{r^2}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{13}}{2} r - r}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{13}\, r - 2r}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{13} - 2}{4} r \\[2ex] x_2 = \dfrac{\frac{\sqrt{13}}{2} r + r}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{13}\, r + 2r}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{13} + 2}{4} r \end{cases}$$

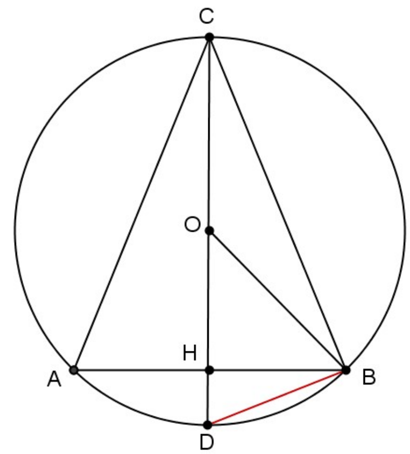
Pertanto

$$\overline{EN} = \frac{\sqrt{13} - 2}{4} r \qquad e \qquad \overline{FN} = \frac{\sqrt{13}}{2} r - x = \frac{\sqrt{13}}{2} r - \frac{\sqrt{13} - 2}{4} r = \frac{2\sqrt{13} - \left(\sqrt{13} - 2\right)}{4} r = \frac{\sqrt{13} + 2}{4} r$$

Oppure

$$\overline{EN} = \frac{\sqrt{13} + 2}{4} r \qquad e \qquad \overline{FN} = \frac{\sqrt{13}}{2} r - x = \frac{\sqrt{13}}{2} r - \frac{\sqrt{13} + 2}{4} r = \frac{2\sqrt{13} - \left(\sqrt{13} + 2\right)}{4} r = \frac{\sqrt{13} - 2}{4} r \, .$$

In una circonferenza di centro O inscrivi un triangolo isoscele avente la base di 16 cm e i lati obliqui di 20 cm ciascuno. Calcola la misura del raggio.



Soluzione 1

$$\overline{BH} = \frac{\overline{AB}}{2} = 8\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{20^2 - 8^2}\ cm = \sqrt{336}\ cm = 4\sqrt{21}\ cm$$

Applicando il I T. di Euclide al triangolo BCD si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CD} \ ; \qquad 20^2 = 4\sqrt{21} \cdot \overline{CD} \ ;$$

$$\overline{CD} = \frac{400}{4\sqrt{21}} = \frac{100}{\sqrt{21}} = \frac{100}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{100\sqrt{21}}{21} \ .$$

Pertanto il raggio misura:

$$r = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{50\sqrt{21}}{21}\ cm \ .$$

Soluzione 2

Applicando il T. delle corde si ha:

$$CH \cdot DH = AH \cdot BH \ ; \qquad 4\sqrt{21} \cdot \overline{DH} = 8 \cdot 8 \ ;$$

$$\overline{DH} = \frac{8 \cdot 8}{4\sqrt{21}}\ cm = \frac{16}{\sqrt{21}}\ cm = \frac{16}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}}\ cm = \frac{16\sqrt{21}}{21}\ cm$$

Pertanto:

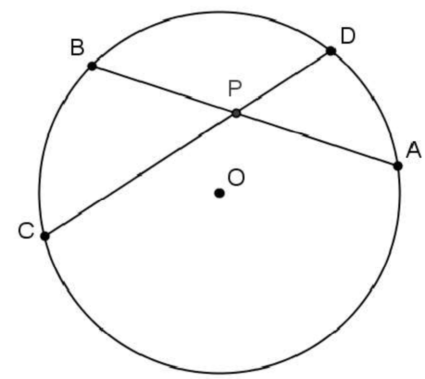
$$r = \frac{\overline{CH} + \overline{DH}}{2} = \frac{4\sqrt{21} + \frac{16\sqrt{21}}{21}}{2}\ cm = \frac{\frac{84\sqrt{21} + 16\sqrt{21}}{21}}{2}\ cm = \frac{\frac{100\sqrt{21}}{21}}{2}\ cm = \frac{50\sqrt{21}}{21}\ cm \ .$$

Problema 206.116

Due corde AB e CD di una circonferenza di raggio 10 cm si intersecano in un punto P interno a essa. Sapendo che $\overline{AB} = 7\ cm$ e le parti un cui è divisa CD sono lunghe 6 cm e 2 cm, determina le lunghezze delle parti in cui è divisa la corda AB.

Soluzione

Ponendo $\overline{PA} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = 7 - x$



Applicando il teorema delle corde si ha:

$PC \cdot PD = PA \cdot PB$:

$6 \cdot 2 = (7 - x) \cdot x$;

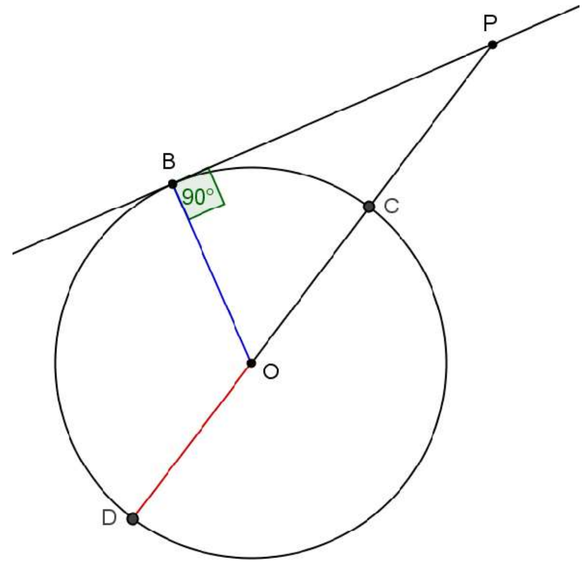
$7x - x^2 = 12$;

$x^2 - 7x + 12 = 0$;

$x_1 = 3$
$x_2 = 4$ Pertanto $\overline{AP} = 3\ cm$ e $\overline{BP} = 4\ cm$.

Problema 206.117

Da un punto P esterno a una circonferenza e distante 20 cm dal centro O di essa, conduci una tangente lunga 12 cm . Determina la lunghezza del raggio.



Soluzione 1

Applicando il T. di Pitagora al triangolo BPO si ha:

$r = \overline{BO} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{20^2 - 12^2}\ cm =$

$= \sqrt{400 - 144}\ cm = \sqrt{256}\ cm = 16\ cm.$

Soluzione 2

Ponendo $\overline{OC} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} = 20 - x$ e $\overline{PD} = 20 + x$

Applicando il T. della Tangente si ha:

$PC \cdot PD = PT^{\,2}$

$(20 + x) \cdot (20 - x) = 12^2$;

$400 - x^2 = 144$; $\quad x^2 = 256$; $\quad x = \mp\sqrt{256} = \mp 16$.

Scartando la soluzione negativa, si ha: $r = \overline{OC} = 16\ cm$.