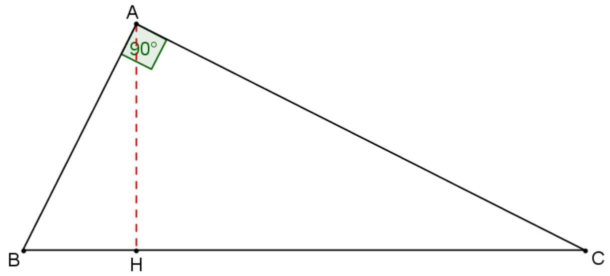
PROBLEMI SUI TEOREMI DI EUCLIDE

risolvibili per via aritmetica

Problema P.422a

In un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa misurano $18\ cm$ e $54\ cm$. Determina le misure dei cateti.

$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} \overline{BH} = 18\ cm \\ \overline{HC} = 54\ cm \end{cases} \qquad\qquad \begin{matrix} \overline{AB} = ? \\ \overline{AC} = ? \end{matrix}$$



Soluzione

Calcoliamo la misura dell'ipotenusa $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = (18 + 54)\ cm = 72\ cm$.

Applicando il 1° T. di Euclide si ricava la misura del cateto AB.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{18 \cdot 72}\ cm = \sqrt{1296}\ cm = 36\ cm\,.$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ricava la misura del cateto AC.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{72^2 - 36^2}\ cm = \sqrt{5184 - 1296}\ cm = \sqrt{3888}\ cm = 36\sqrt{3}\ cm \qquad (\simeq 62{,}35\ cm)$$

oppure

Applicando il 2° T. di Euclide si ricava la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa AH.

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}} = \sqrt{18 \cdot 54}\ cm = \sqrt{972}\ cm = 18\sqrt{3}\ cm\,.$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABH si ricava la misura del lato AB.

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{18^2 + 972}\ cm = \sqrt{324 + 972}\ cm = \sqrt{1296}\ cm = 36\ cm\,.$$

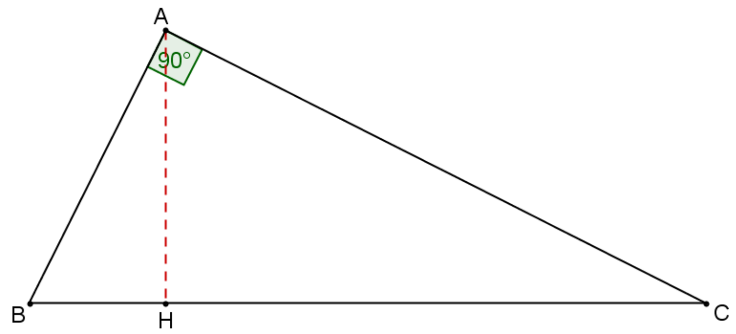
Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ricava la misura del lato AC.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{72^2 - 36^2}\ cm = \sqrt{5184 - 1296}\ cm = \sqrt{3888}\ cm = 36\sqrt{3}\ cm \qquad (\simeq 62{,}35\ cm)$$

Problema P.422b

In un triangolo rettangolo un cateto misura 24 cm , mentre la sua proiezione sull'ipotenusa misura 12 cm . Determina il perimetro del triangolo.

$$D\,A\,T\,I \begin{cases} \overline{AB} = 24\ cm \\ \overline{BH} = 12\ cm \end{cases} \qquad 2p_{ABC} = ?$$



Soluzione

Applicando il 1° T. di Euclide si ricava la misura dell'ipotenusa BC.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BH}} = \frac{24^2}{12}\ cm = \frac{576}{12}\ cm = 48\ cm\,.$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ricava la misura del cateto AC.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{48^2 - 24^2}\ cm = \sqrt{2304 - 576}\ cm = \sqrt{1728}\ cm = 24\sqrt{3}\ cm$$

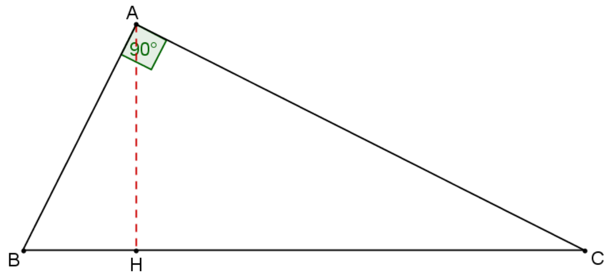
Pertanto il perimetro del triangolo ABC è:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(24 + 48 + 24\sqrt{3}\right) cm = \left(72 + 24\sqrt{3}\right) cm \qquad (\simeq 113{,}57\ cm)$$

Problema P.422c

In un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa misurano $2a$ e $6a$. Determina le misure dei cateti.

$$D\ A\ T\ I \begin{cases} \overline{BH} = 2a \\ \overline{HC} = 6a \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \overline{AB} = ? \\ \overline{AC} = ? \end{array}$$



Soluzione

Calcoliamo la misura dell'ipotenusa $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = 2a + 6a = 8a$.

Applicando il 1° T. di Euclide si ricava la misura del cateto AB.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{2a \cdot 8a} = \sqrt{16a^2} = 4a$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ricava la misura del cateto AC.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(8a)^2 - (4a)^2} = \sqrt{64a^2 - 16a^2} = \sqrt{48a^2} = 4\sqrt{3}\,a\ .$$

Oppure

Applicando il 2° T. di Euclide si ricava la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa AH.

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}} = \sqrt{2a \cdot 6a} = \sqrt{12a^2} = 2\sqrt{3}\,a\ .$$

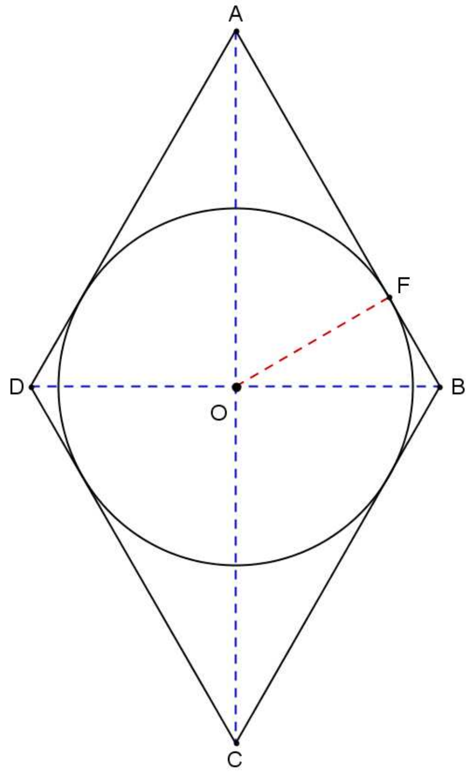
Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABH si ricava la misura del lato AB.

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(2\sqrt{3}\,a\right)^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = \sqrt{16a^2} = 4a\ .$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ricava la misura del lato AC.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(8a)^2 - (4a)^2} = \sqrt{64a^2 - 16a^2} = \sqrt{48a^2} = 4\sqrt{3}\,a\ .$$

In un rombo, il raggio del cerchio inscritto è lungo $2\sqrt{5}\ cm$ e la diagonale minore è lunga $12\ cm$. Determina il perimetro del rombo.



$$DATI \begin{cases} \overline{DB} = 12\ cm \\ \overline{OF} = 2\sqrt{5}\ cm \end{cases} \qquad 2p_{ABCD} = ?$$

Soluzione

Essendo $\overline{DB} = 12\ cm \quad \Rightarrow \quad \overline{OB} = \frac{\overline{DB}}{2} = 6\ cm$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo OBF si ricava:

$$\overline{BF} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OF}^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{36 - 20}\ cm = \sqrt{16}\ cm = 4\ cm\,.$$

Applicando il 1° T. di Euclide al triangolo rettangolo AOB si ha:

$$\overline{OB}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{AB} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{BF}} = \frac{6^2}{4}\ cm = 9\ cm\,.$$

Pertanto il perimetro del rombo è:

$$2p = 4 \cdot \overline{AB} = 4 \cdot 9\ cm = 36\ cm\,.$$