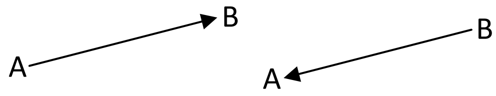
I vettori

Un **segmento orientato** è un segmento AB su cui è stato fissato un verso di percorrenza, da A verso B oppure da B verso A.



Il segmento orientato da A verso B è indicato con il simbolo $\overrightarrow{AB}$.

Due segmenti orientati che hanno la stessa direzione (ossia che giacciono su due rette parallele), lo stesso verso e la stessa lunghezza si dicono **segmenti equipollenti**.

Nell'insieme dei segmenti orientati, la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza, perché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. L'equipollenza pertanto determina una suddivisione di tutti i segmenti orientati del piano in classi di equivalenza. Ciascuna di queste classi di equivalenza è chiamata **vettore** e contiene tutti e soli i segmenti fra loro equipollenti.

Un vettore è indicato con una lettera sormontata da una freccia, $\vec{v}$, oppure con il segmento orientato che lo rappresenta, $\overrightarrow{AB}$.

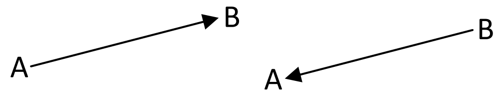
Un vettore $\overrightarrow{AB}$ è caratterizzato da:

- il **modulo** AB ossia la misura della lunghezza del segmento AB rispetto a un'unità prefissata;
- la **direzione**, cioè la direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- il **verso**.

Il **vettore nullo** è il vettore che ha come rappresentanti i segmenti nulli. Il vettore nullo viene indicato con $\vec{0}$, ha modulo zero e direzione e verso indeterminati.

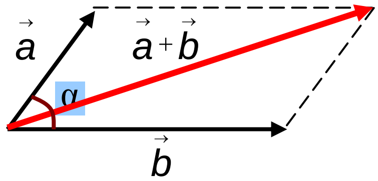
Il vettore opposto di un vettore $\overrightarrow{AB}$ è il vettore $\overrightarrow{BA}$, ossia il vettore che ha lo stesso modulo di $\overrightarrow{AB}$, la stessa direzione, ma verso contrario. Il vettore opposto del vettore $\vec{v}$ è indicato con $-\vec{v}$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \qquad -\vec{v} = \overrightarrow{BA}$$



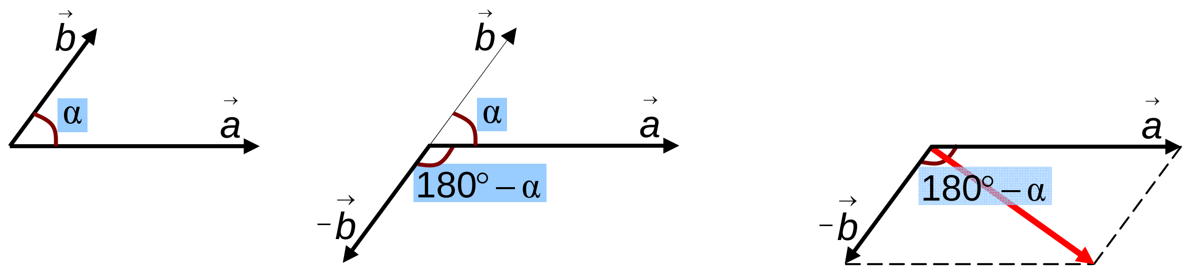
Somma di due vettori

La somma di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si ottiene con la regola del parallelogrammo.
Il suo modulo vale $\vec{a} + \vec{b} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a\,b\cos\alpha}$



Differenza di due vettori

La differenza di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si ottiene eseguendo la somma del vettore $\vec{a}$ con il vettore $-\vec{b}$.



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \sqrt{a^2 + (-b)^2 + 2a\,b\cos(180 - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a\,b\,(-\cos\alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a\,b\cos\alpha}$$

In definitiva $\vec{a} - \vec{b} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a\,b\cos\alpha}$

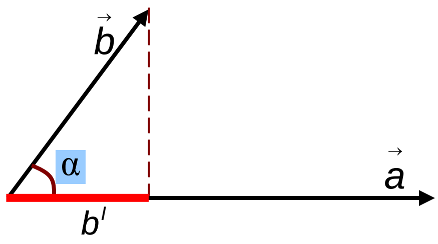
Prodotto di un vettore per uno scalare

Siano k un numero reale e $\vec{v}$ un vettore, il prodotto del numero k per il vettore $\vec{v}$ è definito nel seguente modo:

- se $k > 0$ il prodotto $k\,\vec{v}$ è il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$ e modulo uguale $k \cdot |\vec{v}|$.
- se $k < 0$ il prodotto $k\,\vec{v}$ è il vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, verso opposto a quello di $\vec{v}$ e modulo uguale $|k| \cdot |\vec{v}|$.
- se $k = 0$ il prodotto $k\,\vec{v}$ è il vettore $k \cdot |\vec{v}| = \vec{0}$.

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il prodotto di un vettore per la componente dell'altro vettore lungo la direzione del primo.



Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare e non un vettore.

Il prodotto scalare di due vettori è:

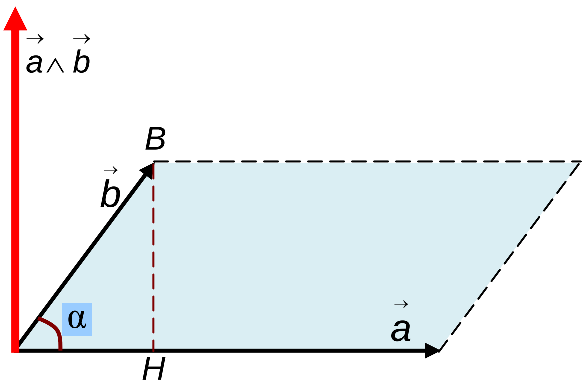
- positivo se α è acuto
- negativo se α è ottuso.

In simboli $\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b^{I}$ cioè: $\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$

Osservazione: Il prodotto scalare di due vettori ortogonali è zero (perché cos 90° = 0.

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che si indica con $\vec{a} \wedge \vec{b}$, e si legge $\vec{a}$ vettore $\vec{b}$, è un vettore avente per modulo l'area del parallelogrammo costruito sui due vettori, per direzione quella perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e verso tale che, rispetto ad esso, il vettore $\vec{a}$ per sovrapporsi a $\vec{b}$, descrivendo un angolo minore di 180°, deve ruotare in senso antiorario.



Il modulo del prodotto vettoriale è: $\vec{a} \wedge \vec{b} = a \cdot b \cdot sen\ \alpha$.

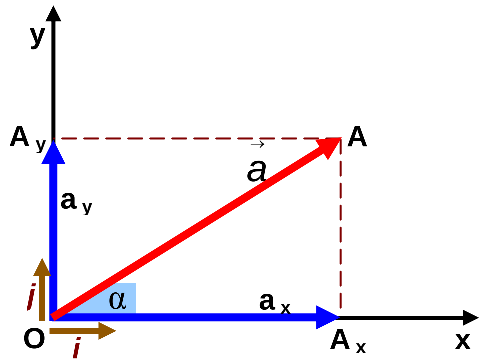
Osservazione: il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è zero.

REGOLA DELLA MANO DESTRA

Tenendo la mano destra in modo tale che le dita piegate seguano la rotazione del vettore $\vec{a}$ verso $\vec{b}$, il pollice indica la direzione e il verso del prodotto vettoriale.

COMPONENTI DI UN VETTORE

Le componenti cartesiane del vettore $\vec{a}$ sono le proiezioni OA_x e OA_y del vettore $\vec{a}$ lungo l'asse x e lungo lasse y.



In simboli: $OA_x = a \cdot \cos\alpha$ e $OA_y = a \cdot sen\ \alpha$

Considerando i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (vettori unitari diretti come gli assi) si ha:

$OA_x = a_x \cdot \vec{i}$ e $OA_y = a_y \cdot \vec{j}$

da cui si ottiene l'**espressione cartesiana del vettore** $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$

Dalla figura si ha che il modulo del vettore $a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}$ mentre l'angolo

$\alpha = arctg\ \dfrac{a_y}{a_x}$.

SOMMA DI DUE VETTORI TRAMITE LE LORO COMPONENTI

Le componenti del vettore somma (differenza) di due vettori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ sono uguali alla somma (differenza) delle componenti omonime dei due vettori.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\ \vec{i} + (a_y + b_y)\ \vec{j}$$

Dimostrazione

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) + \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = (a_x + b_x)\ \vec{i} + (a_y + b_y)\ \vec{j}$$

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI TRAMITE LE LORO COMPONENTI

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ è uguale alla somma dei prodotti delle componenti omonime dei due vettori.

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Dimostrazione

Essendo $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = 1$ e $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{i} = 0$ si ha:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y$$

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI TRAMITE LE LORO COMPONENTI

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ giacenti sullo stesso piano α è il vettore diretto secondo il versore $\vec{k}$ ortogonale al piano α , nello stesso verso di $\vec{k}$ oppure verso opposto, a secondo che la componente $a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$ in tale direzione risulti positiva oppure negativa e avente modulo $\left|a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right|$.

In simboli $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right) \vec{k}$.

Dimostrazione

Essendo $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = 0$ e $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ si ha:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) \wedge \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x b_x \vec{i} \wedge \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \wedge \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \wedge \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \wedge \vec{j} =$$

$$= a_x b_y \vec{K} + a_y b_x \left(-\vec{k}\right) = a_x b_y \vec{K} - a_y b_x \vec{k} = \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \vec{k}$$

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Una **trasformazione geometrica** è una funzione biunivoca che associa a ogni punto del piano un altro punto del piano.

Il punto che corrisponde a P nella trasformazione f si indica con $f(P)$ e si dice **corrispondente** (o immagine o trasformato) di P nella f.

Una figura si dice **unita** rispetto ad una data trasformazione se la figura trasformata coincide con quella di partenza.

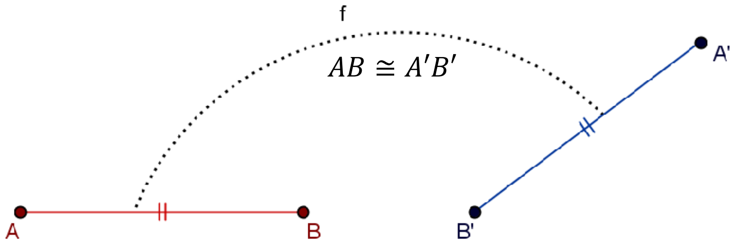
Un segmento si dice **unito** rispetto ad una data trasformazione se il segmento trasformato coincide con quello di partenza.

Una retta si dice **unita** rispetto ad una data trasformazione se la retta trasformata coincide con quella di partenza.

Un punto si dice **unito** rispetto ad una data trasformazione se il punto trasformato coincide con quello di partenza.

ISOMETRIE

Un'**isometria** è una trasformazione geometrica che conserva la distanza.



PROPRIETÀ DELLE ISOMETRIE

TEOREMA

Una isometria trasforma rette in rette.

Dimostrazione

Dimostrare che l'immagine di una retta è una retta equivale a dimostrare che le immagini A', B', C' di tre punti allineati A, B e C sono ancora tre punti allineati. Supponiamo A, B, C ordinati come nella figura. Risulta che:

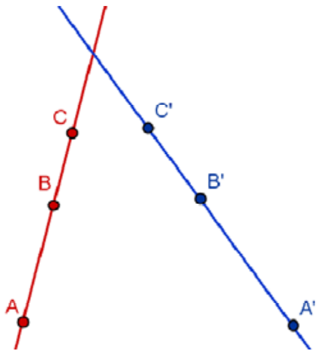
$AB + BC \cong AC$

Poiché una isometria conserva le distanze, sarà:

$AB \cong A'B'$, $\quad BC \cong B'C'$, $\quad AC \cong A'C'$

Quindi: $A'B' + B'C' \cong A'C'$. Tale relazione implica che A', B', C' sono allineati.

(se non fossero allineati, per la disuguaglianza triangolare, dovrebbe risultare che: A'B' + B'C' > A'C').



COROLLARIO

Una isometria trasforma semirette in semirette e segmenti in segmenti.

TEOREMA

Una isometria trasforma una coppia di rette parallele in una coppia di rette parallele.

IPOTESI		TESI
f è una isometria; $\quad r \parallel s$ $r' = f(r) \quad \wedge \quad s' = f(s)$	$\Rightarrow$	$r' \parallel s'$

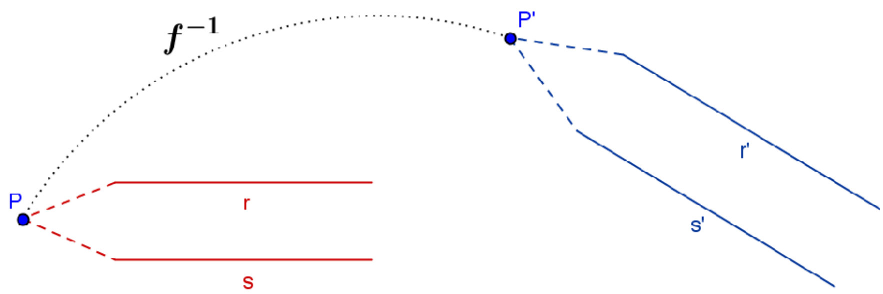
Dimostrazione

Se r e s coincidono, la tesi è banale. Consideriamo quindi il caso in cui r e s sono parallele distinte.

Supponiamo, per assurdo, che le due rette r' e s' siano incidenti in P'.

La controimmagine P di P' apparterrebbe alla retta r (poiché $P' \in r'$) e alla retta s (poiché $P' \in s'$).

Quindi r e s dovrebbero avere in comune il punto P. Ma ciò contraddice l'ipotesi che r e s siano parallele distinte. Dunque, dobbiamo concludere che anche r' e s' sono parallele.

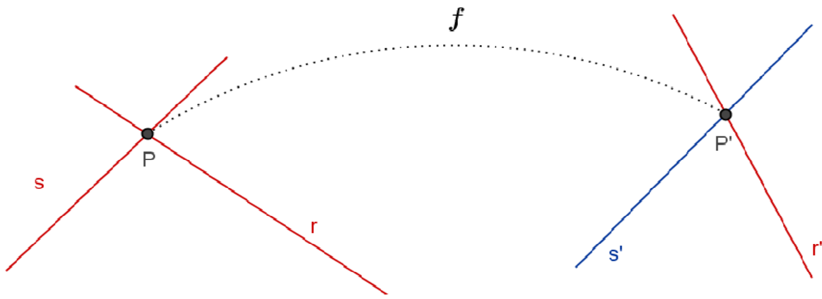


Teorema

Un'isometria trasforma una coppia di rette incidenti in una coppia di rette incidenti e il punto d'intersezione della prima coppia di rette ha come immagine nell'isometria il punto d'intersezione delle rette corrispondenti nell'isometria.

IPOTESI		TESI
f è una isometria; $\quad r \cap s = \{P\}$ $r' = f(r) \quad \wedge \quad s' = f(s) \quad \wedge \quad P' = f(P)$	$\Rightarrow$	$r' \cap s' = \{P'\}$

Dimostrazione



Siccome $P \in r \quad \Rightarrow \quad P' \in r'$

Siccome $P \in s \quad \Rightarrow \quad P' \in s'$

Pertanto r' e s' hanno in comune almeno il punto P'.

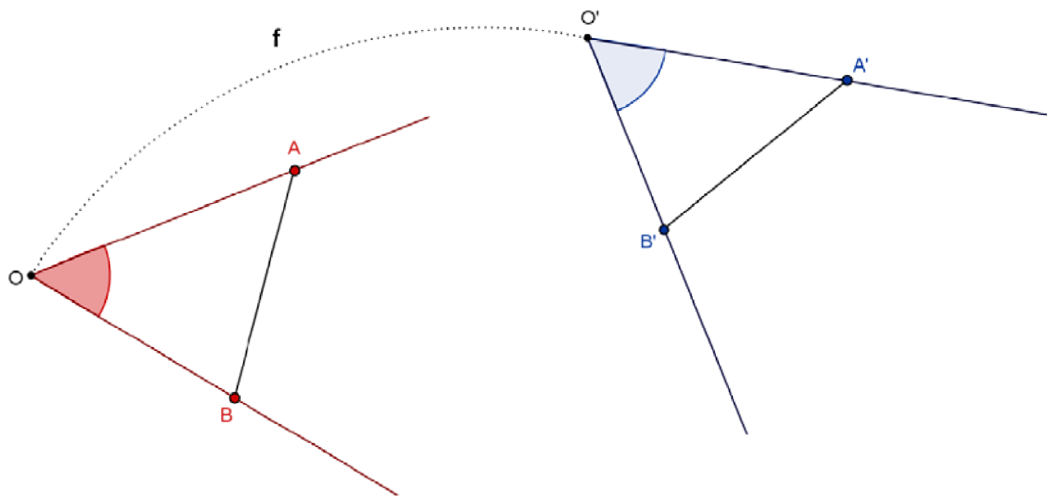
Se per assurdo, r' e s' avessero in comune un altro punto $Q' \neq P'$, questo sarebbe immagine di un punto $Q \neq P$ di intersezione di r e s. Le rette r e s, avendo in comune due punti distinti, P e Q, coinciderebbero. Ma ciò contraddice l'ipotesi che r e s siano incidenti. Si conclude che: $r' \cap s' = \{P'\}$.

Teorema

Una isometria trasforma un angolo in un angolo a esso congruente. I lati e il vertice dell'angolo trasformato sono le immagini dei lati e del vertice dell'angolo originario.

IPOTESI		TESI
f è una isometria; $a'\widehat{O}'b' = f\left(a\widehat{O}b\right)$	$\Rightarrow$	$a\widehat{O}b \cong a'\widehat{O}'b'$

Dimostrazione



Presi due punti A e B sui lati a e b dell'angolo $a\widehat{O}b$, A' e B' sono i loro corrispondenti nell'isometria f.

Per il teorema precedente si ha: $f(0) = 0'$.

Poiché le isometrie conservano le distanze, i triangoli AOB e $A'O'B'$ hanno i tre lati ordinatamente congruenti, quindi sono congruenti per il terzo criterio di congruenza. In particolare hanno gli angoli $AOB \cong A'O'B'$.

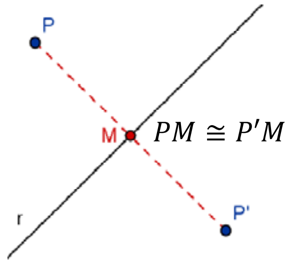
Corollario

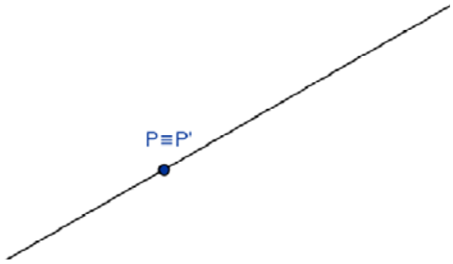
Una isometria trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari.

SIMMETRICO DI UN PUNTO RISPETTO AD UNA RETTA

Il **simmetrico** di un punto P rispetto ad una retta r è il punto:

$$\begin{cases} P \text{ stesso} & se\ P \in r \\ P' \text{ t.c. l'asse di } PP' \text{ sia la retta } r & se\ P \notin r \end{cases}$$





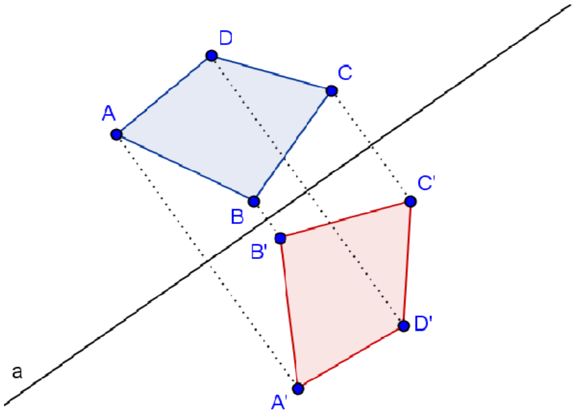
SIMMETRIA ASSIALE

La **simmetria assiale** rispetto a una data retta r è la trasformazione che associa a ogni punto P del piano il punto P', simmetrico di P rispetto a r.

La retta r si chiama asse di simmetria.

Se una figura è univocamente determinata da un certo numero di punti (un segmento è individuato dai due punti estremi; un triangolo è individuato dai suoi tre vertici), per determinare la sua corrispondente nella simmetria rispetto a una retta r è sufficiente determinare i simmetrici di questi punti.

Per determinare la retta simmetrica di s rispetto a r, basta scegliere due punti A e B sulla retta s e determinarne i punti simmetrici.



La simmetria assiale è una trasformazione involutoria. (l'inversa di una simmetria assiale è la trasformazione stessa).

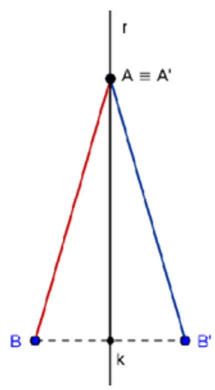
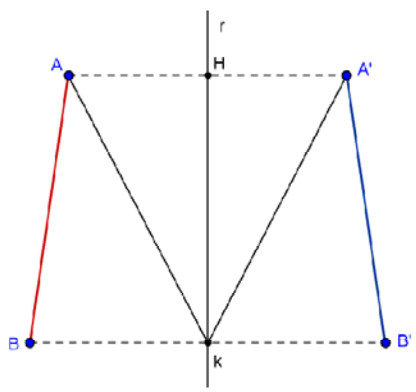
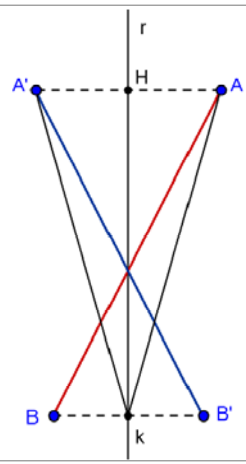
TEOREMA

Ogni simmetria assiale è una isometria.

IPOTESI		TESI
AB è un segmento del piano; r è una retta; $A'B'$ simmetrico di AB rispetto alla retta r	$\Rightarrow$	$A'B' \cong AB$

Dimostrazione

I casi che si possono presentare sono quattro:

I	II	III	IV
			
$A \in r \quad \wedge \quad B \in r$	$A \in r \quad \wedge \quad B \notin r$	$A \notin r \quad \wedge \quad B \notin r$ A e B giacciono nello stesso semipiano di origine r	$A \notin r \quad \wedge \quad B \notin r$ A e B giacciono in semipiani opposti rispetto all'origine r

Dimostriamo soltanto il III caso. Le dimostrazioni degli altri casi si effettuano con lo stesso procedimento.
Indicati con H e K, rispettivamente, i punti d'intersezione di AA' e BB' con la retta r.
I due triangoli rettangoli AHK e $A'HK$ sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Infatti:

HK è in comune

$AH \cong A'H$ perché A e A' sono punti simmetrici rispetto alla retta r

Avendo dimostrato che $AHK \cong A'HK \quad \Rightarrow \quad AK \cong A'K'$.

I triangoli ABK e $A'B'K$ sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

$AK \cong A'K'$ per la dimostrazione precedente

$BK \cong B'K$ perché B e B' sono punti simmetrici rispetto alla retta r

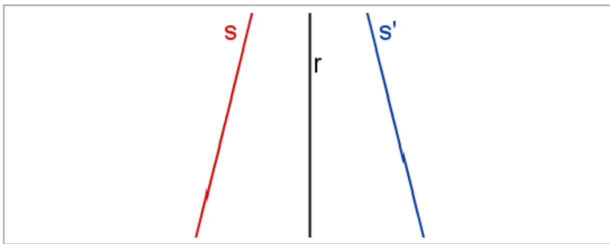
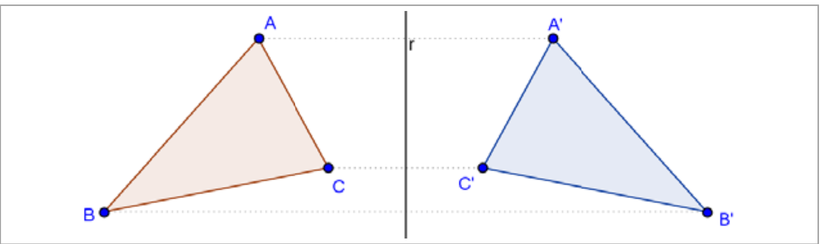
$A\widehat{K}B \cong A\widehat{K}B'$ perché complementari degli angoli congruenti $A\widehat{K}H$ e $A'\widehat{K}H$.

In definitiva si conclude che: $A'B' \cong AB$.

PROPRIETÀ INVARIANTI DI UNA SIMMETRIA ASSIALE

Le simmetrie assiali, essendo delle isometrie, conservano:

- l'allineamento dei punti;
- l'incidenza e il parallelismo tra le rette;
- la lunghezza dei segmenti;
- l'ampiezza degli angoli.

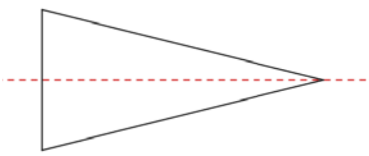
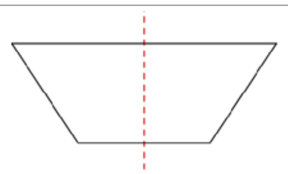
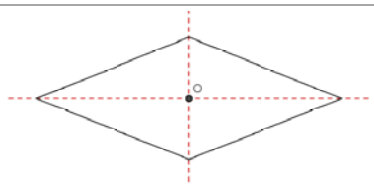
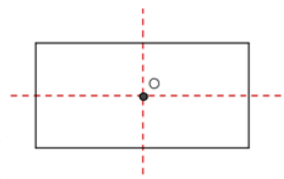
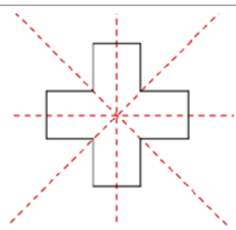
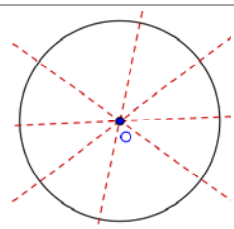
	
La simmetria assiale non conserva le direzioni	La simmetria assiale non conserva l'orientamento delle figure

ELEMENTI UNITI DI UNA SIMMETRIA ASSIALE

Tutti e soli i punti appartenenti all'asse di simmetria sono uniti. Pertanto l'asse di simmetria è una retta unita.
Ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è unita; essa però non è costituita da punti uniti.

FIGURE SIMMETRICHE

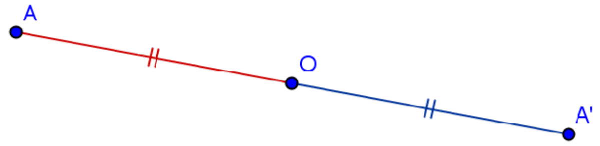
Una figura si dice simmetrica rispetto alla retta r se risulta unita nella simmetria rispetto a una retta r.
La retta r si chiama asse di simmetria della figura.

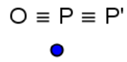
Figure con un asse di simmetria		
Figure con due assi di simmetria		
Figure con più assi di simmetria		

Simmetrie centrali

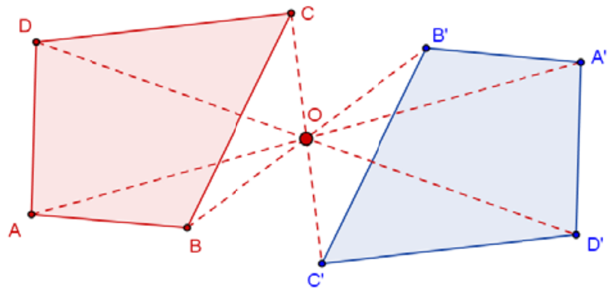
SIMMETRICO DI UN PUNTO RISPETTO AD UN PUNTO

Il **simmetrico** di un punto P rispetto ad un punto O è $\begin{cases} \text{il punto } P \text{ stesso} & se\ P \equiv O \\ \text{il punto } P' \text{ t.c. il punto medio di } PP' \text{ sia } O & se\ P \neq O \end{cases}$





SIMMETRIA CENTRALE

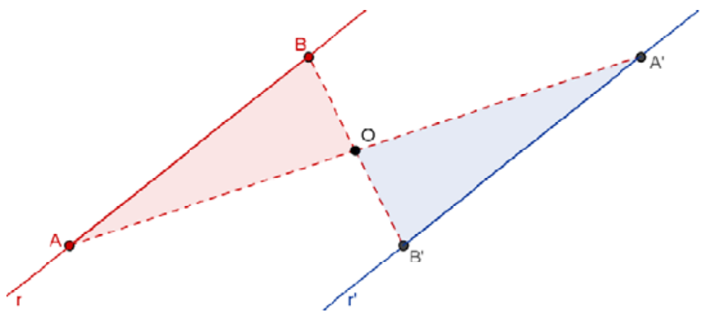


La **simmetria centrale** di centro $\boldsymbol{O}$ è la trasformazione che associa a ogni punto P del piano il suo simmetrico P' rispetto al centro O. Essa è indicata con S_O.
Per individuare la figura trasformata in una simmetria centrale è sufficiente determinare i simmetrici rispetto al punto O dei punti che individuano la figura.

TEOREMA

Ogni simmetria centrale è una isometria.

IPOTESI		TESI
AB è un segmento del piano O è il centro della simmetria $A'B'$ simmetrico di AB rispetto ad O	$\Rightarrow$	$A'B' \cong AB$



Dimostrazione

I triangoli $AOB \cong A'OB'$ per il I criterio di congruenza.
Infatti:

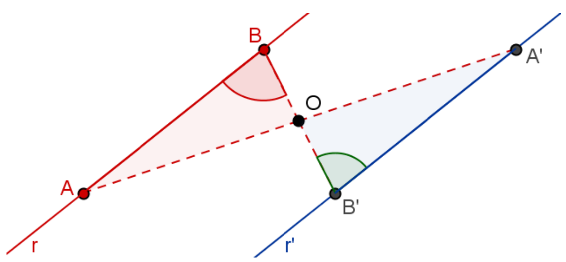
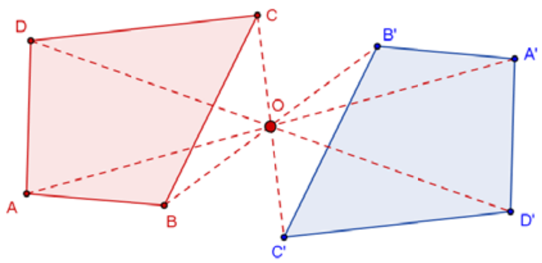
$AO \cong OA'$ perché A e A' simmetrici rispetto ad O
$BO \cong OB'$ perché B e B' simmetrici rispetto ad O
$A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$ perché angoli opposti al vertice.

La congruenza $AOB \cong A'OB'$ $\Rightarrow$ $A'B' \cong AB$.

PROPRIETÀ INVARIANTI DI UNA SIMMETRIA CENTRALE

Le simmetrie centrali, essendo delle isometrie, conservano:

- l'allineamento dei punti;
- l'incidenza e il parallelismo tra le rette;
- la lunghezza dei segmenti;
- l'ampiezza degli angoli.

Le simmetrie centrali conservano le direzioni, ovvero una retta viene trasformata in una retta parallela	Le simmetrie centrali conservano l'orientamento delle figure
	

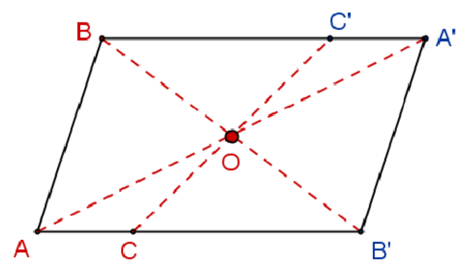
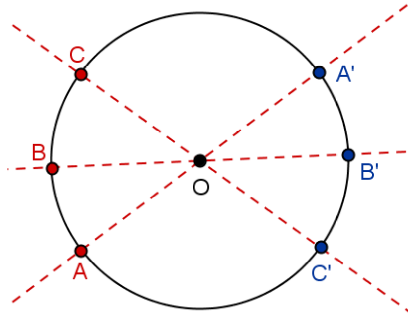
ELEMENTI UNITI DI UNA SIMMETRIA CENTRALE

L'unico punto unito della simmetria centrale è il centro della simmetria.

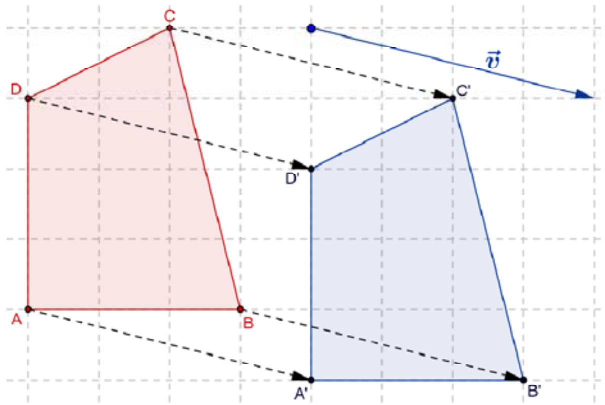
Ogni retta passante per il centro della simmetria è una retta unita; esse però non sono costituite da punti uniti.

FIGURE SIMMETRICHE

Una figura si dice simmetrica se la figura corrispondente in una simmetria centrale è la figura stessa (la figura risulta unita rispetto alla simmetria). Il punto O si chiama centro di simmetria della figura.

<table>
<tr><td>Figure con un centro di simmetria</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Figure con infiniti centri di simmetria</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Traslazioni



TRASLAZIONE

La **traslazione** di vettore $\vec{v}$ è la trasformazione che associa a ogni punto P del piano il punto P' tale che PP' abbia la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo del vettore $\vec{\mathbf{v}}$.
Essa è indicata con il simbolo $\boldsymbol{T_{\vec{v}}}$.

La traslazione di vettore nullo coincide con l'identità.

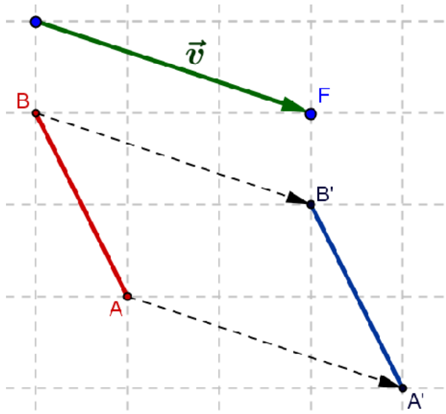
L'inversa di una traslazione di vettore $\vec{v}$ è la traslazione individuata dal vettore $-\vec{v}$ opposto di $\vec{v}$.

TEOREMA

La traslazione è una isometria.

IPOTESI		TESI
AB è un segmento del piano $\boldsymbol{T_{\vec{v}}}$ è una traslazione di vettore $\vec{v}$ $\mathrm{A'B'}$ traslato di AB di un vettore $\vec{v}$	$\Rightarrow$	$\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{AB}$

<u>*Dimostrazione*</u>

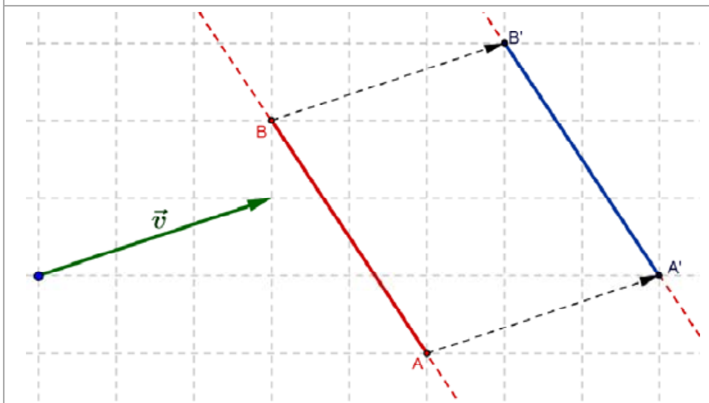
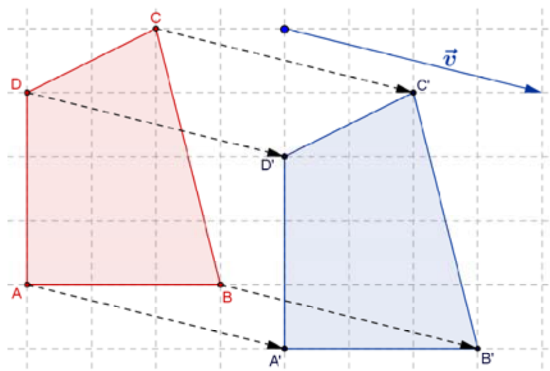


$ABB'A'$ è un parallelogramma.
Infatti:
$BB' \parallel AA'$ perché hanno la stessa direzione del vettore $\vec{v}$
$BB' \cong AA'$ perché hanno lo stesso modulo del vettore $\vec{v}$
Avendo dimostrato che $ABB'A'$ è un parallelogramma, esso ha i lati opposti sono congruenti. In particolare $\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{AB}$.

PROPRIETÀ INVARIANTI DI UNA SIMMETRIA ASSIALE

Le traslazioni, essendo delle isometrie, conservano:

- l'allineamento dei punti;
- l'incidenza e il parallelismo tra le rette;
- la lunghezza dei segmenti e l'ampiezza degli angoli.

Le traslazioni conservano le direzioni, ovvero una retta viene trasformata in una retta parallela	Le traslazioni conservano l'orientamento delle figure
	

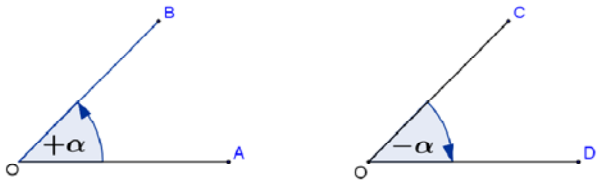
ELEMENTI UNITI DI UNA TASLAZIONE

La traslazione, ad eccezione dell'identità, non ha punti uniti.

Tutte le rette del piano che hanno la stessa direzione del vettore $\vec{v}$ sono rette unite. Nessun punto di queste rette è unito nella traslazione.

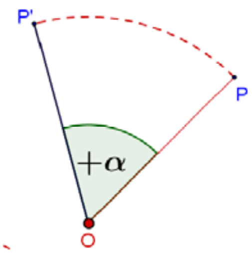
Rotazioni

ANGOLO ORIENTATO



Un **angolo orientato** è un angolo in cui è stato stabilito quale dei due lati è considerato come primo lato. A seconda del lato scelto l'angolo risulta orientato in senso orario o antiorario.

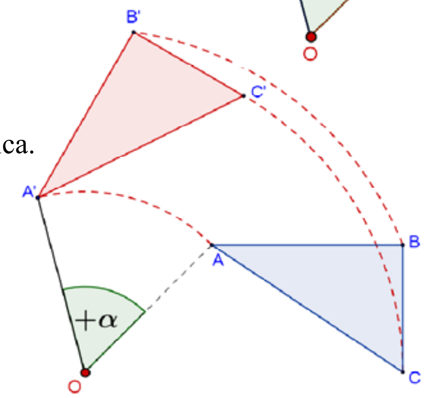
ROTAZIONE



La **rotazione** di centro $\boldsymbol{O}$ e angolo di rotazione $\boldsymbol{\alpha}$ è la trasformazione che associa a ogni punto P il punto P' tale che:

- l'angolo $P\hat{O}P'$, orientato in modo che OP sia il primo lato, ha la stessa ampiezza e lo stesso orientamento di α
- $OP' \cong OP$.

CASI PARTICOLARI



Una rotazione di angolo di rotazione nullo coincide con la trasformazione identica.

Una rotazione di $+180°$ o di $-180°$ coincide con una simmetria avente centro nel centro della rotazione.

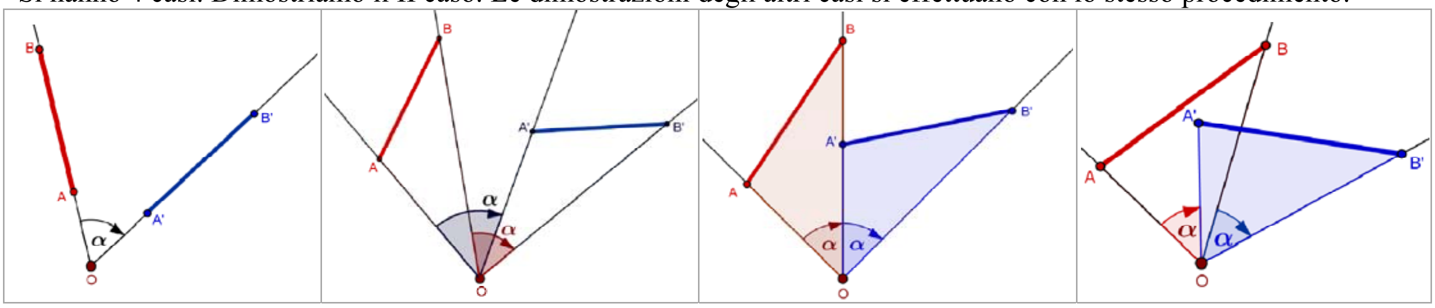
TEOREMA

Ogni rotazione è una isometria.

IPOTESI		TESI
AB è un segmento del piano $R_{O,\alpha}$ è una rotazione di centro O e angolo α $\mathrm{A'B'}$ trasformato di AB nella rotazione $R_{O,\alpha}$	$\Rightarrow$	$\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{AB}$

Dimostrazione

Si hanno 4 casi. Dimostriamo il II caso. Le dimostrazioni degli altri casi si effettuano con lo stesso procedimento.



I triangoli $\mathrm{AOB} \cong \mathrm{A'OB'}$ per il I criterio di congruenza. Infatti:

$OA \cong OA'$ e $OB \cong OB'$ perché $R_{O,\alpha}$ è una rotazione

$A\hat{O}B \cong A'OB'$ perché differenze di angoli congruenti.

Avendo dimostrato che $AOB \cong A'OB'$ $\Rightarrow$ $\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{AB}$.

PROPRIETÀ INVARIANTI DELLE ROTAZIONI

Le rotazioni, essendo isometrie, conservano le lunghezze dei segmenti, le ampiezze degli angoli, l'allineamento dei punti, il parallelismo e l'incidenza tra le rette. Conservano, inoltre, l'orientamento delle figure.
Le rotazioni non conservano invece le direzioni.

ELEMENTI UNITI DELLE ROTAZIONI

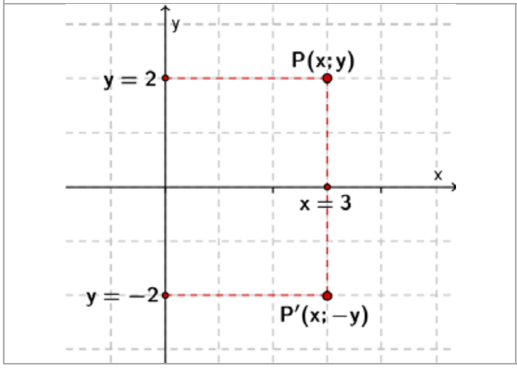
L'unico punto unito di una rotazione è il centro di rotazione.
Nessuna retta è unita rispetto a una rotazione , ad eccezione dell'identità e della simmetria centrale.

Isometrie nel piano cartesiano

In questo capitolo studiamo alcune isometrie nel piano cartesiano. Nello specifico, determiniamo le **equazioni delle trasformazioni**: quelle formule che consentono di passare dalle coordinate (x, y) di un punto P alle coordinate $(x';\ y')$ del suo punto corrispondente P'.

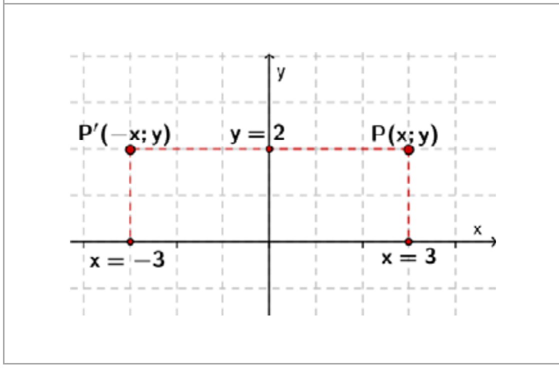
SIMMETRIE ASSIALI

Simmetria rispetto all'asse x



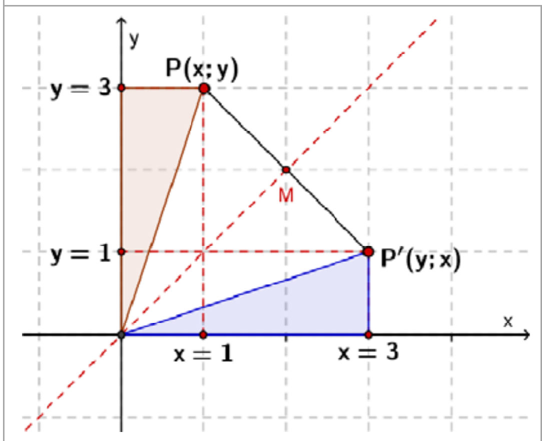
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse y



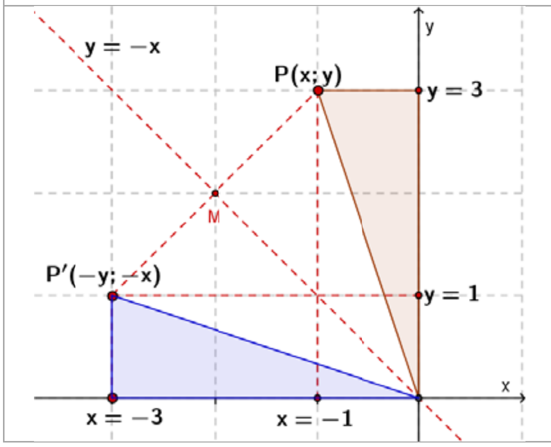
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$



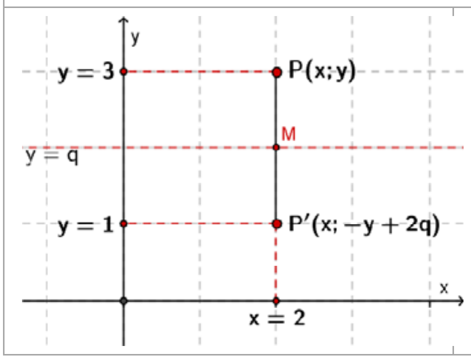
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$



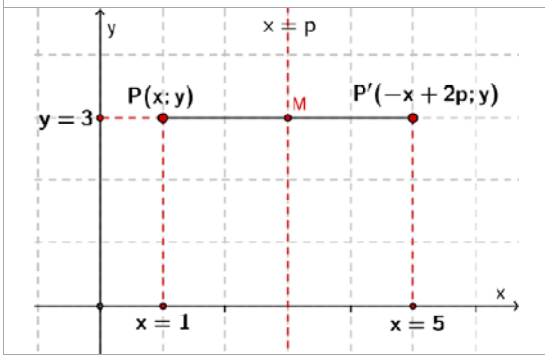
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Simmetria rispetto alla retta $y = q$



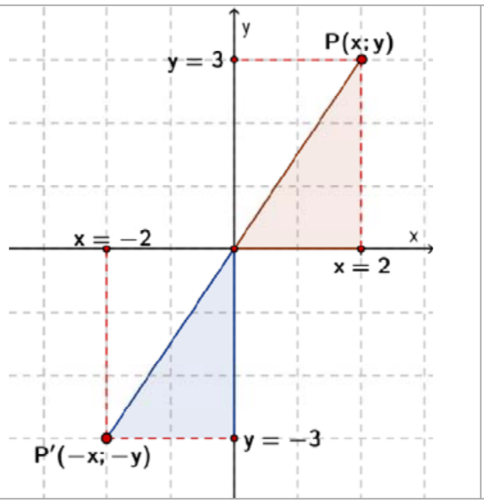
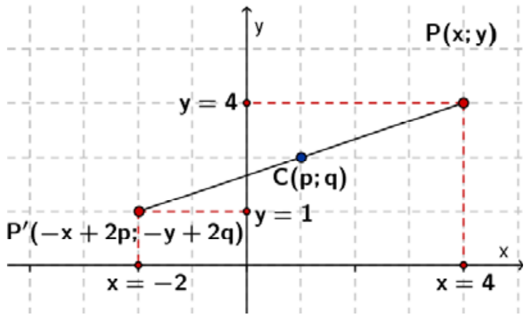
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2q \end{cases}$$

Simmetria rispetto alla retta $x = p$



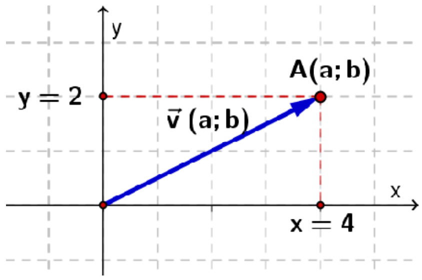
$$\begin{cases} x' = -x + 2p \\ y' = y \end{cases}$$

SIMMETRIE CENTRALI

Simmetria rispetto all'origine $O(0;0)$	Simmetria rispetto al punto $C(p;q)$
 $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$	 $\begin{cases} x'=-x+2p \\ y'=-y+2q \end{cases}$

TRASLAZIONI

In un piano cartesiano ortogonale, è possibile assegnare un vettore mediante una coppia ordinata di numeri reali (a, b), detti componenti del vettore. Il vettore $\vec{v}$ di componenti a e b è il vettore rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{OA}$, dove $A(a;\ b)$.



Dato un punto $P(x; y)$, le coordinate del punto $P'(x'; y')$, corrispondente di P nella traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ sono:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

ESEMPIO

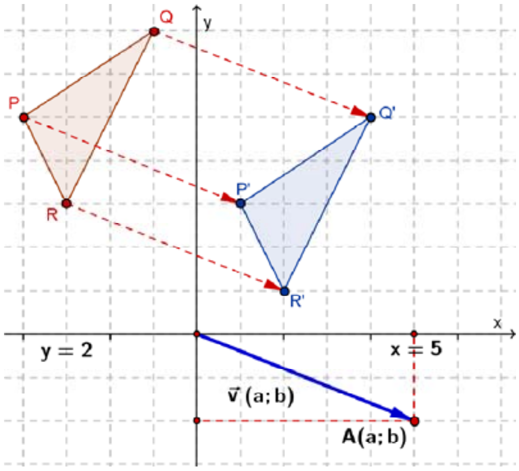
Dato il triangolo di vertici $P(-4; 5)$, $Q(-1; 7)$, $R(-3; 3)$, determina le coordinate dei vertici del suo corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(5; -2)$.

<u>*Soluzione*</u>

Applicando le equazioni della traslazione

$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ *si ottiene:*

P': $(-4 + 5 = 1\ ;\ \ 5 - 2 = 3)$
Q': $(-1 + 5 = 4\ ;\ \ 7 - 2 = 5)$
R': $(-3 + 5 = 2\ ;\ 3 - 2 = 1)$



NOTA

Nella dimostrazione di un teorema, in genere, conviene ricorrere alle isometrie quando una figura presenta un centro o un asse di simmetria. In questi casi, le proprietà di conservazione delle isometrie permettono spesso di snellire le dimostrazioni.