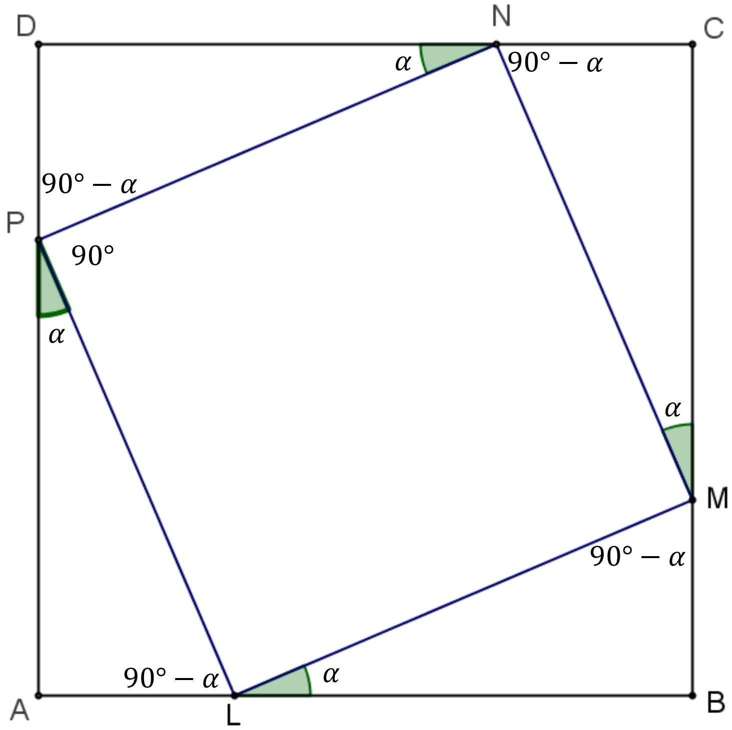
PROBLEMI DI GEOMETRIA 1

Problema 1.160.86

Indica con L un punto del lato AB del quadrato ABCD e considera il segmento AL. Proseguendo nello stesso verso di rotazione prendi sugli altri lati i punti M, N e P in modo tale che i segmenti BM, CN, DP siano congruenti ad AL. Dimostra che LMNP è un quadrato.



Soluzione

I triangoli $APL \cong BML$ per il 1° C. C. T. R. Infatti:

$AL \cong BM$ per costruzione.

$AP \cong LB$ perché differenza di segmenti congruenti

$\widehat{A} \cong \widehat{B} = 90°$

Pertanto: $PL \cong LM$

I triangoli $BML \cong CMN$ per il 1° C. C. T. R. Infatti:

$BM \cong CN$ per costruzione.

$LB \cong MC$ perché differenza di segmenti congruenti

$\widehat{B} \cong \widehat{C} = 90°$

Pertanto: $LM \cong MN$

I triangoli $CMN \cong DNP$ per il 1° C. C. T. R. Infatti:

$CN \cong DP$ per costruzione.

$MC \cong DN$ perché differenza di segmenti congruenti

$\widehat{C} \cong \widehat{D} = 90°$

Pertanto: $MN \cong PN$

Si conclude pertanto che: $PL \cong LM \cong MN \cong NP$

Dalla congruenza dei quattro triangoli si ha inoltre che:

$A\widehat{P}L \cong M\widehat{L}B \cong N\widehat{M}C \cong D\widehat{N}P = \alpha$ e $A\widehat{L}P \cong L\widehat{M}B \cong M\widehat{N}C \cong N\widehat{P}D = 90° - \alpha$

Da cui si ottiene che gli angoli del quadrilatero LMNP sono tutti angoli retti.

In definitiva il quadrilatero LMNP ha 4 angoli retti e 4 lati congruenti, quindi è un quadrato.

Problema 1.162.100

Considera una circonferenza di centro O e un punto P interno alla circonferenza. Dimostra che fra tutte le corde passanti per P, quella perpendicolare al diametro per P è la corda minima.

<u>Soluzione</u>

OH rappresenta la distanza del centro O dalla corda CD .

OP rappresenta la distanza del centro O dalla corda AB .

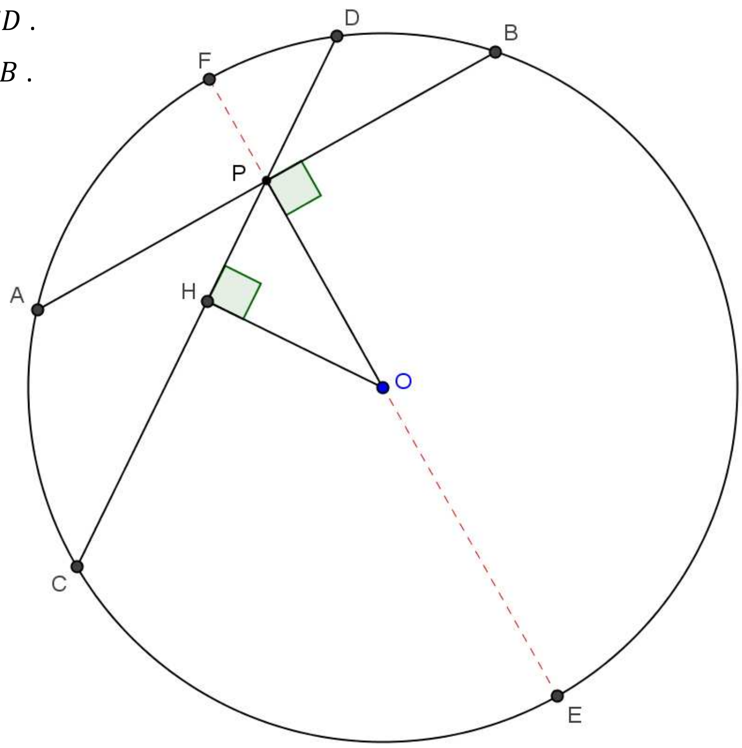
Essendo POH un triangolo rettangolo, risulta che:

l'ipotenusa OP sia maggiore del cateto OH .

Pertanto, per un teorema sulle corde, si ha che:

la corda AB essendo più distante dal centro risulta

di minore lunghezza.

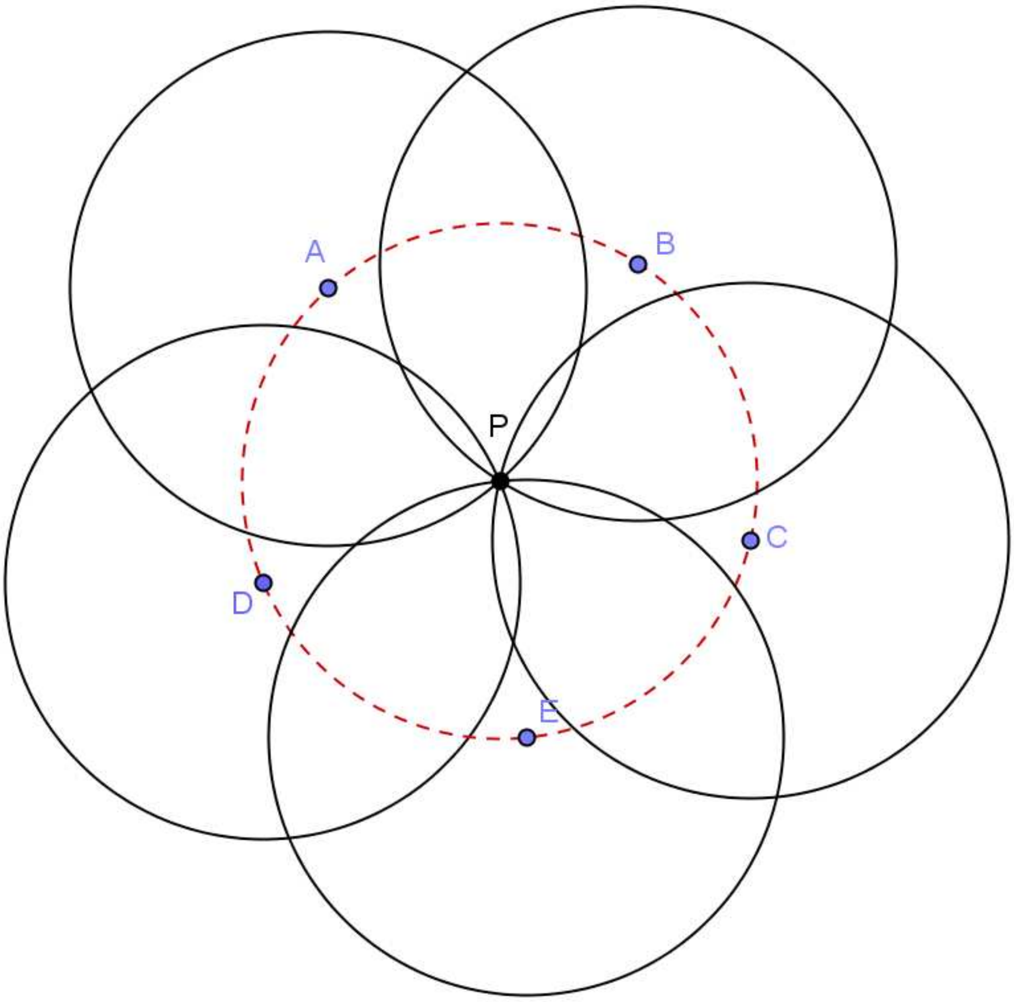


Problema 1.162.101

Disegna cinque circonferenze aventi raggi congruenti e passanti tutte per un punto P. A quale figura geometrica appartengono i loro centri? Individuala.

Soluzione

I centri delle cinque circonferenze, dovendo passare tutte per lo stesso punto P e dovendo avere i raggi congruenti, appartengono ad una circonferenza di centro P e raggio uguale ai raggi delle cinque circonferenze.



Problema 1.162.102

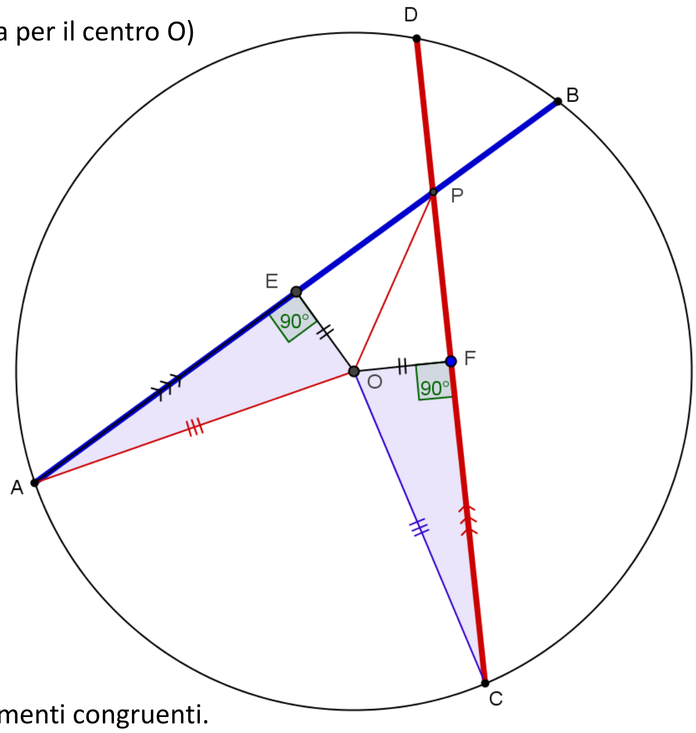
Disegna una circonferenza di centro O e due corde congruenti che si intersecano nel punto P. Dimostra che esse si tagliano in modo tale che i segmenti dell'una sono congruenti ai segmenti dell'altra.

<u>Soluzione</u>

Congiungiamo A con O e O con C.

Disegniamo l'asse OE della corda AB (per un teorema passa per il centro O)

Disegniamo l'asse OF della corda CD (per un teorema passa per il centro O)



I triangoli $\mathrm{AOE} \cong \mathrm{COF}$ per il 4° C. C. T. R. Infatti:

$\mathrm{AO} \cong \mathrm{OC} \cong \mathrm{r}$

$\mathrm{AE} \cong \mathrm{CF}$ perché $\mathrm{AE} \cong \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cong \frac{1}{2}\mathrm{CD} \cong \mathrm{CF}$

$\mathrm{A\hat{E}O} \cong \mathrm{C\hat{F}O} = 90°$ perché OE è l'asse della corda AB
e OF è l'asse della corda CD

Essendo I triangoli $\mathrm{AOE} \cong \mathrm{COF} \Rightarrow OE \cong OF$

I triangoli $EOP \cong \mathrm{FOP}$ per il 4° C. C. T. R. Infatti:

$OE \cong OF$ dalla dimostrazione precedente

OP in comune

$\mathrm{P\hat{E}O} \cong \mathrm{P\hat{F}O} = 90°$

Essendo I triangoli $EOP \cong \mathrm{FOP} \Rightarrow EP \cong FP$

Si conclude pertanto che $AP \cong CP$ perché somma di segmenti congruenti.

Infatti: $AP \cong AE + EP \cong CF + FP \cong CP$

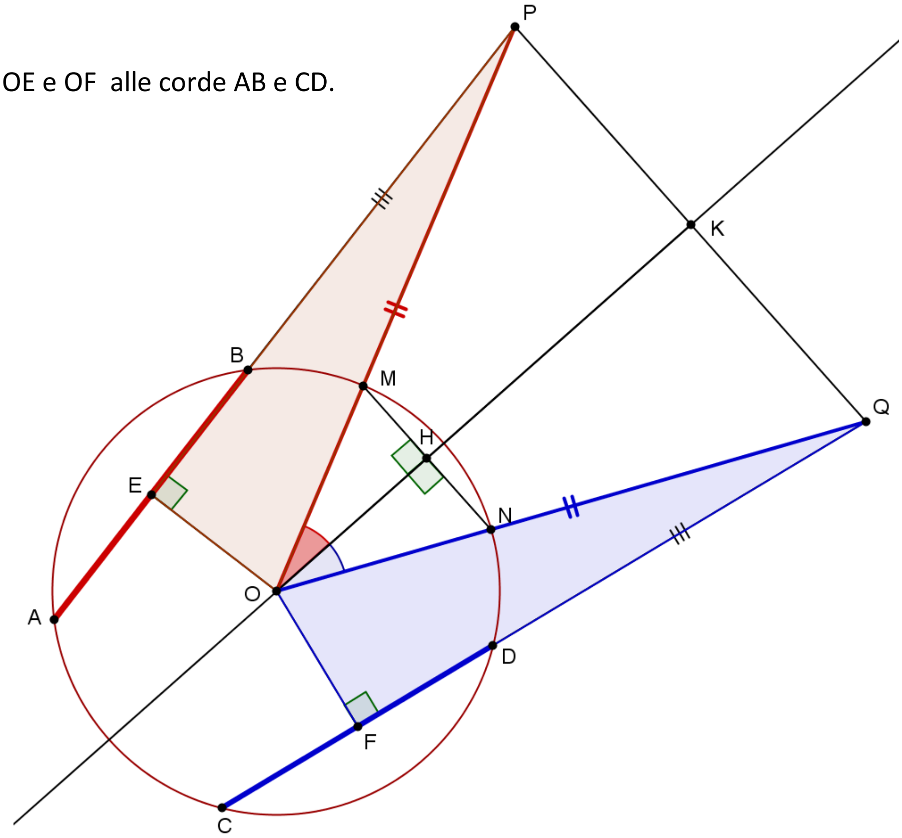
E anche $PB \cong PD$ perché differenza di segmenti congruenti.

Infatti: $PB \cong AB + AP \cong CD - CP \cong CP$

Problema 1.162.103

Data una circonferenza, traccia due corde AB e CD congruenti e fissa sui loro prolungamenti i segmenti BP e DQ congruenti. Dimostra che l'asse del segmento PQ passa per il centro della circonferenza.

<u>Soluzione</u>



Conduciamo dal centro 0 le perpendicolari OE e OF alle corde AB e CD.

I triangoli $\mathrm{EOP} \cong \mathrm{FOQ}$ per il 1° C. C. T.

Infatti:

$\mathrm{OE} \cong \mathrm{OF} \cong \mathrm{r}$

$\mathrm{EP} \cong \mathrm{EB} + \mathrm{BP} \cong \mathrm{FD} + \mathrm{DQ} \cong \mathrm{FQ}$

$\mathrm{O\hat{E}P} \cong \mathrm{O\hat{F}Q} = 90°$

Pertanto: $\mathrm{OP} \cong \mathrm{OQ}$ (*)

I triangoli $\mathrm{OMH} \cong \mathrm{OHN}$ per il 4° C. C. T.

Infatti:

OH in comune

$\mathrm{OM} \cong \mathrm{ON} \cong \mathrm{r}$

$\mathrm{O\hat{H}M} \cong \mathrm{O\hat{H}N} = 90°$

Pertanto: $\mathrm{H\hat{O}M} \cong \mathrm{H\hat{O}N}$ (**)

Infine i triangoli $\mathrm{OPK} \cong OQK$ per il 4° C. C. T.

Infatti:

OK in comune

$\mathrm{OP} \cong \mathrm{OQ}$ per (*)

$\mathrm{K\hat{O}P} \cong \mathrm{K\hat{O}Q}$ per (**)

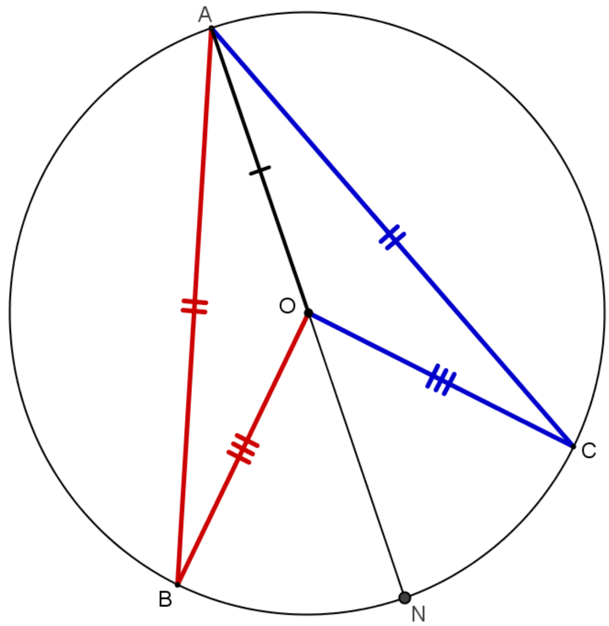
$\mathrm{O\hat{H}M} \cong \mathrm{O\hat{H}N} = 90°$

Pertanto: $\mathrm{PK} \cong \mathrm{KQ}$ e $\mathrm{O\hat{K}P} \cong \mathrm{O\hat{K}Q} = 90°$.

Da cui si ricava che la retta OK, passante per il centro della circonferenza è l'asse del segmento PQ.

Problema 1.162.104

Traccia due corde congruenti AB e AC di una circonferenza. Dimostra che il diametro AN divide l'angolo $\mathrm{B\widehat{A}C}$ in due parti congruenti.



<u>Soluzione</u>

Tracciamo il diametro AN e congiungiamo B con O e O con C .

I triangoli $AOB \cong AOC$ per il 3° C.C.T.

Infatti:

AO è in comune

$OB \cong OC \cong r$

$AB \cong AC$ per ipotesi

Pertanto $B\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O} \cong \mathrm{O\widehat{A}C}$

Il che vuol dire che AN è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{C}$.

Problema 1.162.105

Considera una circonferenza e da un punto P interno a essa traccia due corde AB e CD. Dimostra che se i segmenti AP, PB, CP e DP sono congruenti, le due corde sono, necessariamente, due diametri.

Soluzione

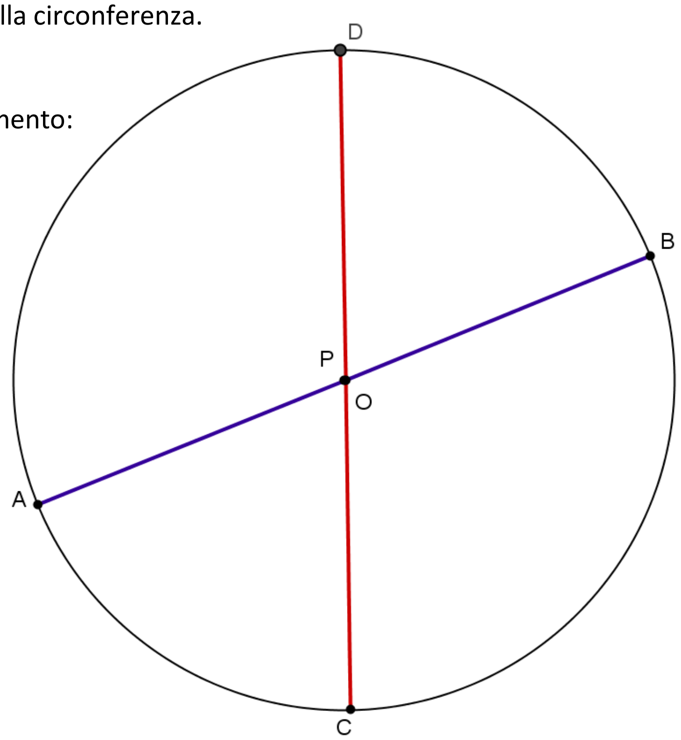
Essendo i punti A, B, C, D appartenenti alla stessa circonferenza e $AP \cong PB \cong CP \cong DP$, dalla definizione di circonferenza, essi rappresentano le distanze dal centro della circonferenza.

Pertanto: $AP \cong PB \cong CP \cong DP = r$

Ma essendo A, P, B punti appartenenti allo stesso segmento:

$\Rightarrow$ $AB = 2r$ è il diametro della circonferenza.

Per lo stesso motivo $CD = 2r$ è anch'esso un diametro.



Problema 1.162.106

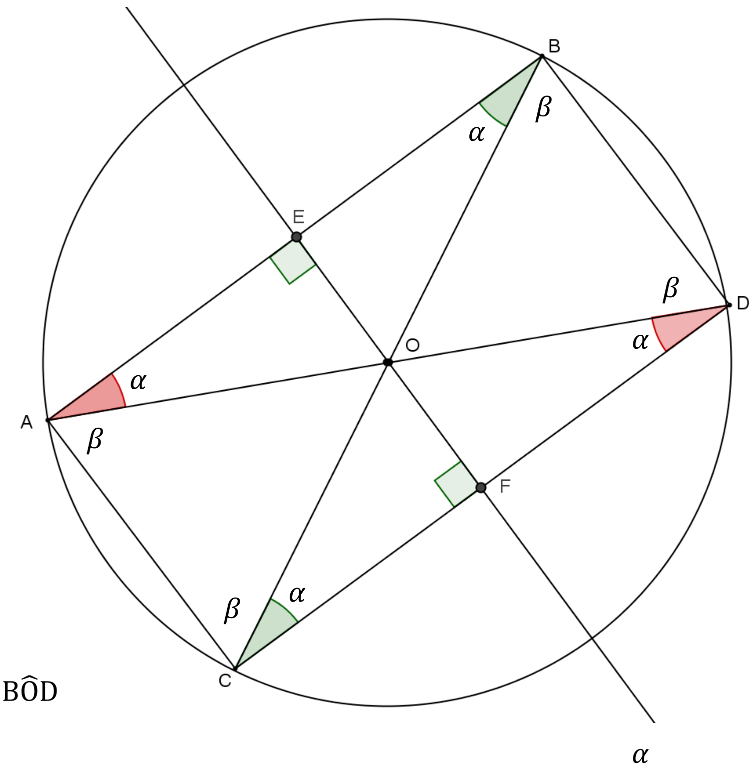
In una circonferenza di centro O conduci due corde congruenti e parallele AB e CD. Dimostra che ABCD è un rettangolo.

<u>Soluzione</u>

Costruiamo l'asse della corda AB. Per un teorema esso passa per il centro O della circonferenza.

Per lo stesso motivo anche l'asse della corda CD passa per il centro O della circonferenza.

I due assi essendo perpendicolari alle due rette parallele AB e CD ed entrambi passanti per il centro O, coincidono.



Congiungiamo Il centro O con i punti A, B, C, D.

I triangoli $AOB \cong COD$ per il 3° C.C.T.

Infatti:

$AO \cong CO \cong r$

$BO \cong DO \cong r$

$AB \cong CD$ per ipotesi.

I triangoli AOB e COD sono isosceli.

Pertanto : $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A \cong O\hat{D}C \cong O\hat{C}D \cong \alpha$

Anche i triangoli $AOC \cong BOD$ per il 1° C.C.T.

Infatti:

$AO \cong OD \cong r$

$CO \cong OB \cong r$

$A\hat{O}C \cong 180° - A\hat{O}E - C\hat{O}F \cong 180° - E\hat{O}B - D\hat{O}F \cong B\hat{O}D$

I triangoli AOB e COD sono isosceli.

Pertanto : $O\hat{A}C \cong O\hat{C}A \cong O\hat{D}B \cong O\hat{B}D \cong \beta$ α

Ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a 360° si ha:

$4\alpha + 4\beta = 360°$ cioè: $\alpha + \beta = 90°$ il che equivale a dire che il quadrilatero ABCD è un rettangolo.