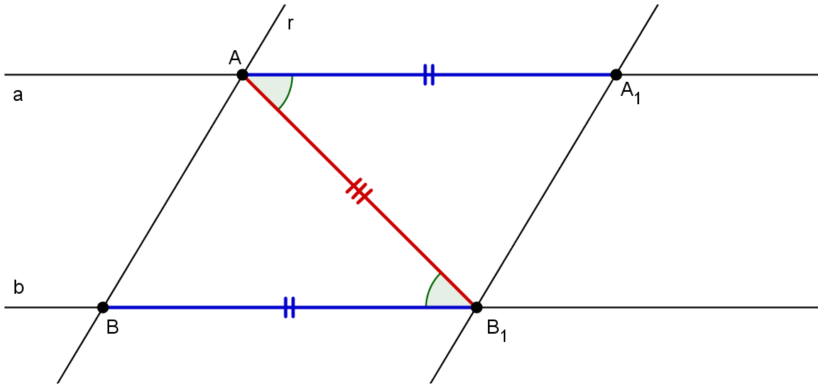
Problema 2.296.5

Siano date due rette parallele a e b, tagliate da una trasversale r rispettivamente nei punti A e B. Si prendano su a e b, da una stessa parte rispetto ad r, due segmenti AA_1 e BB_1 congruenti tra loro. Dimostrare che il quadrilatero AA_1BB_1 è un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
$a \parallel b$ $AA_1 \cong BB_1$	$\Rightarrow$	AA_1B_1B è un parallelogrammo



Dimostrazione

Per dimostrare che AA_1BB_1 è un parallelogrammo occorre dimostrare che ha i lati opposti paralleli, cioè che:

$AA_1 \parallel BB_1$ e $AB \parallel A_1B_1$.

Essendo per ipotesi $a \parallel b \quad \Rightarrow \quad AA_1 \parallel BB_1$.

Per dimostrare che $AB \parallel A_1B_1$ è sufficiente dimostrare che i triangoli AB_1B e AA_1B_1 sono congruenti.

I triangoli AB_1B e AA_1B_1 sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
$AA_1 \cong BB_1$ per ipotesi
AB_1 in comune
$B_1\hat{A}A_1 \cong A\hat{B}_1B$ perché alterni interni alle rette parallele a e b

Avendo dimostrato che i triangoli AB_1B e AA_1B_1 sono congruenti si ha che: $B\hat{A}B_1 \cong A_1\hat{B}_1A$.

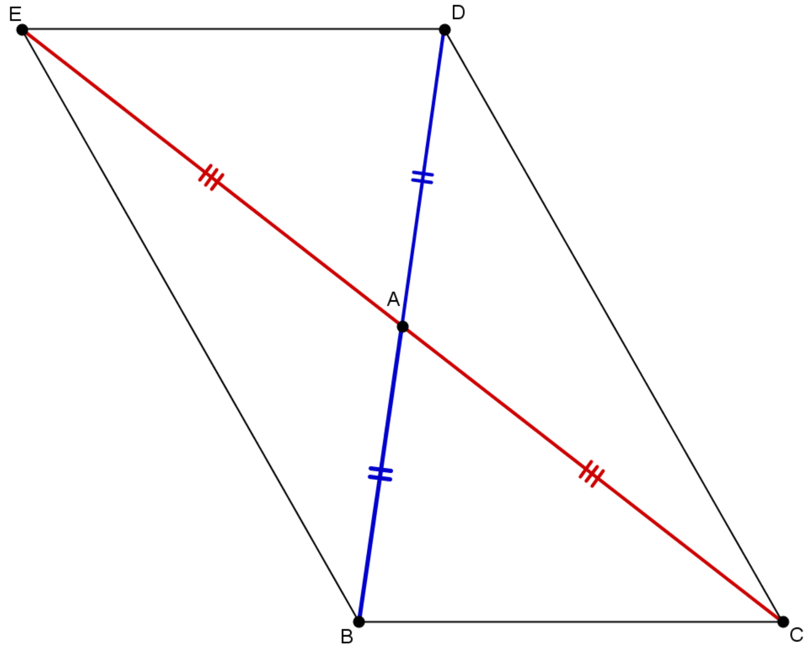
Per il criterio di parallelismo, $B\hat{A}B_1 \cong A_1\hat{B}_1A$ (angoli alterni interni) $\quad \Rightarrow \quad AB \parallel A_1B_1$.

Si conclude pertanto che che AA_1BB_1 è un parallelogrammo.

Problema 2.296.6

Dato il triangolo ABC si prolunghi il lato AB dalla parte di A, di un segmento $AD \cong AB$ e il lato AC, dalla parte di A, di un segmento $AE \cong AC$. Dimostrare che il quadrilatero BCDE è un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo $AD \cong AB$ $AE \cong AC$	$\Rightarrow$	BCDE è un parallelogrammo



Dimostrazione

Per dimostrare che BCDE è un parallelogrammo occorre dimostrare che ha i lati opposti paralleli, cioè :

$BC \parallel ED$ e $BE \parallel DC$.

Per dimostrare che $BC \parallel ED$ occorre dimostrare che i triangoli EDA e ABC sono congruenti.

I triangoli $EDA \cong ABC$ per il I C.C.T. Infatti:
$AE \cong AC$ per ipotesi
$AD \cong AB$ per ipotesi
$D\hat{A}E \cong B\hat{A}C$ perché angoli opposti al vertice.

Avendo dimostrato che i triangoli EDA e ABC sono congruenti si ha che: $A\hat{E}D \cong A\hat{C}B$.

La congruenza fra gli angoli alterni interni $A\hat{E}D \cong A\hat{C}B \Rightarrow ED \parallel BC$.

Per dimostrare che $BE \parallel DC$ occorre dimostrare che i triangoli BEA e ADC sono congruenti.

I triangoli $BEA \cong ADC$ per il I C.C.T. Infatti:
$AE \cong AC$ per ipotesi
$AB \cong AD$ per ipotesi
$E\hat{A}B \cong C\hat{A}D$ perché angoli opposti al vertice.

Avendo dimostrato che i triangoli BEA e ADC sono congruenti si ha che: $A\hat{B}E \cong A\hat{D}C$.

La congruenza fra gli angoli alterni interni $A\hat{B}E \cong A\hat{D}C \Rightarrow BE \parallel DC$.

Problema 2.296.7

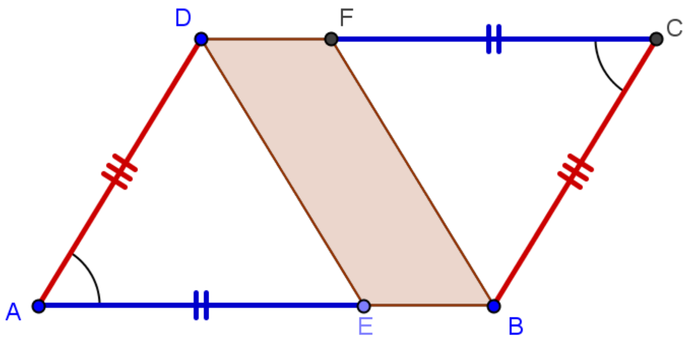
Dato il parallelogrammo ABCD, si prendano sui lati opposti AB e CD i due segmenti congruenti AE e CF. Dimostrare che il quadrilatero DEBF è pure un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
ABCD è un parallelogrammo $AE \cong CF$	$\Rightarrow$	DEBF è un parallelogrammo

Dimostrazione 1

Per dimostrare che DEBF è un parallelogrammo occorre dimostrare che ha i lati opposti paralleli, cioè :

$EB \parallel DF$ e $DE \parallel BF$.



Essendo ABCD un parallelogrammo si ha che: $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$

Pertanto anche $EB \parallel DF$ perché segmenti appartenenti ad AB e CD.

Per dimostrare invece che $DE \parallel BF$ consideriamo i triangoli AED e BCF.

I triangoli AED e BCF sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
$AD \cong BC$ perché ABCD è un parallelogrammo.
$AE \cong CF$ per ipotesi.
$\hat{A} \cong \hat{C}$ perché ABCD è un parallelogrammo.

Avendo dimostrato che i triangoli AED e BCF sono congruenti si ha che: $B\hat{F}C \cong D\hat{E}A$.

Pertanto: $D\hat{F}B \cong B\hat{E}D$, perché supplementari di angoli congruenti ($D\hat{F}B \cong 180° - B\hat{F}C \cong 180° - D\hat{E}A \cong B\hat{E}D$)

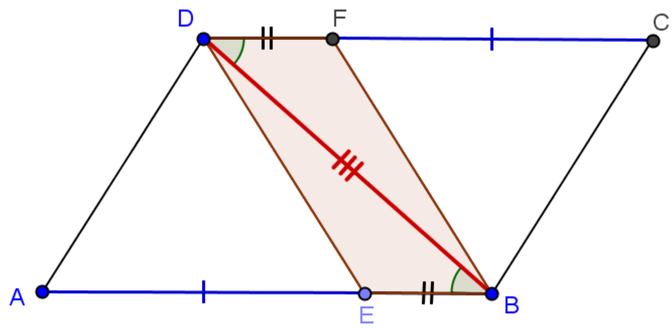
Si ha pertanto: $E\hat{D}F + D\hat{F}B \cong E\hat{D}F + B\hat{E}D = 180°$ (perché $E\hat{D}F$ e $B\hat{E}D$ sono angoli corrispondenti).

Avendo dimostrato che: $E\hat{D}F + D\hat{F}B = 180°$, per il criterio di parallelismo, si conclude che: $DE \parallel BF$, cioè la tesi.

Dimostrazione 2

Per dimostrare che DEBF è un parallelogrammo occorre dimostrare che ha i lati opposti paralleli, cioè :

$EB \parallel DF$ e $DE \parallel BF$.



Essendo ABCD un parallelogrammo si ha che: $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$

Pertanto anche $EB \parallel DF$ perché segmenti appartenenti ad AB e CD.

Per dimostrare invece che $DE \parallel BF$ consideriamo i triangoli BED e BDF.

I triangoli BED e BDF sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
BD è in comune ai due triangoli.
$DF \cong EB$ perché differenza di segmenti congruenti.
$B\hat{D}F \cong D\hat{B}E$ perché alterni interni alle due rette parallele AB e DC.

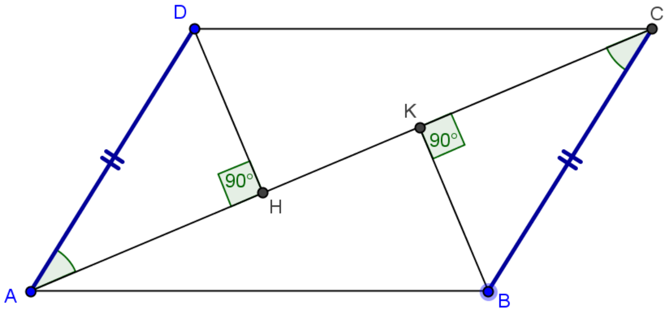
Avendo dimostrato che i triangoli BED e BDF sono congruenti si ha che: $E\hat{D}B \cong F\hat{B}D$.

Essendo $E\hat{D}B$ e $F\hat{B}D$ angoli alterni interni alle rette DE e BF, per il criterio di parallelismo, si conclude che: $DE \parallel BF$.

Problema 2.296.8

Dimostrare che, in un parallelogrammo ABCD, due vertici opposti B e D sono equidistanti dalla diagonale AC che congiunge gli altri due vertici.

IPOTESI		TESI
ABCD è un parallelogrammo $D\widehat{H}A \cong B\widehat{K}C \cong 90°$	$\Rightarrow$	$DH \cong BK$



Dimostrazione

Per dimostrare che $DH \cong BK$ è sufficiente dimostrare che i triangoli ADH e BKC sono congruenti.

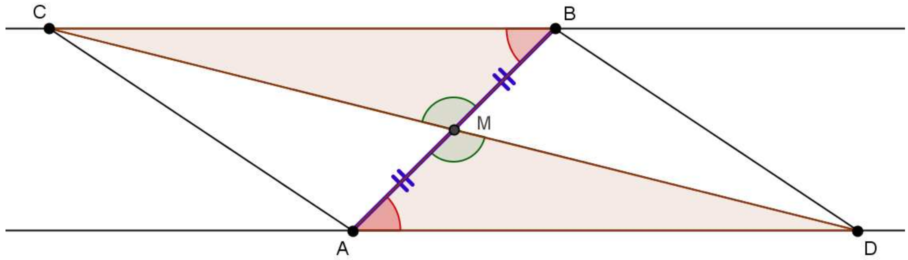
I due triangoli rettangoli ADH e BKC sono congruenti per il II C.C.T.R. (hanno l'ipotenusa e un angolo acuto congruenti). Infatti:
$AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogrammo ABCD.
$H\hat{A}D \cong K\hat{C}B$ perché angoli dei due triangoli congruenti ADC e ACB (*).

(*) ADC e ACB sono congruenti per il III C.C.T. Infatti:
$AB \cong DC$ e $AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogrammo ABCD.
AC in comune.

Problema 2.296.9

Un segmento AB ha gli estremi su due rette parallele; per il suo punto medio M si conduca un altro segmento CD che abbia pure gli estremi sulle due parallele. Dimostrare che anche il segmento CD è dimezzato dal punto M e che i punti A, C, B, D sono i vertici di un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
$AM \cong MB$ AD ∥ CB	$\Rightarrow$	$CM \cong MD$ ACBD è un parallelogrammo



Dimostrazione

Per dimostrare che $CM \cong MD$ è sufficiente dimostrare che i due triangoli AMD e CBM sono congruenti.

I due triangoli AMD e BMC sono congruenti per il II C.C.T. Infatti:
$AM \cong MB$ per ipotesi
$A\widehat{M}D \cong B\widehat{M}C$ perché angoli opposti al vertice M.
$D\hat{A}M \cong C\hat{B}M$ perché angoli alterni interni alle due rette parallele AD e CB.

Anche i triangoli ACM e MBD sono congruenti (per il I C.C.T.). Infatti:
$AM \cong MB$ per ipotesi
$CM \cong MD$ perché lati dei triangoli congruenti AMD e BMC
$C\widehat{M}A \cong D\widehat{M}B$ perché angoli opposti al vertice M.

Avendo dimostrato che i triangoli ACM e MBD sono congruenti si ha che: $A\hat{C}M \cong B\widehat{D}M$.

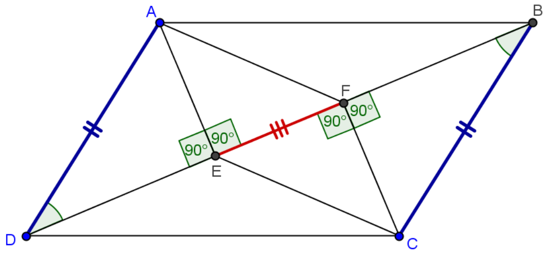
Essendo $A\hat{C}M$ e $B\widehat{D}M$ angoli alterni interni alle rette AC e BD, per il criterio di parallelismo, si ha che: $AC \parallel BD$.

Pertanto, avendo dimostrato che $AC \parallel BD$ e ricordando che per ipotesi $AD \parallel CB$, si conclude che ACBD è un parallelogrammo.

Problema 2.296.10

Dai vertici opposti A e C di un parallelogrammo ABCD si conducano le perpendicolari alla diagonale BD e siano rispettivamente E e F i piedi di tali perpendicolari. Dimostrare che il quadrilatero AECF è un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
ACBD è un parallelogrammo $A\hat{E}D \cong C\hat{F}B \cong 90°$	$\Rightarrow$	AECF è un parallelogrammo



Dimostrazione

Per dimostrare che AECF è un parallelogrammo è sufficiente dimostrare che i due triangoli AFE e EFC sono congruenti.

Per dimostrare che i due triangoli AFE e EFC sono congruenti occorre prima dimostrare che sono congruenti i triangoli $AED \cong FBC$.

I due triangoli rettangoli AED e FBC sono congruenti per il II C.C.T.R. (ipotenusa e un angolo acuto congruenti).
Infatti:
$AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogrammo ABCD
$\mathrm{E\hat{D}A} \cong \mathrm{F\hat{B}C}$ perché angoli alterni interni alle due rette parallele AD e BC.

A questo punto si dimostra che i due triangoli AFE e EFC sono congruenti.
Infatti essi sono congruenti per il I C.C.T.R. perché hanno due cateti rispettivamente congruenti:
$AE \cong FC$ perché lati dei due triangoli congruenti AED e FBC
EF in comune.

Avendo dimostrato che i due triangoli AFE e EFC sono congruenti si ha che: $A\hat{F}E \cong C\hat{E}F$.

La congruenza $A\hat{F}E \cong C\hat{E}F \quad \Rightarrow \quad AF \parallel \mathrm{EC}$

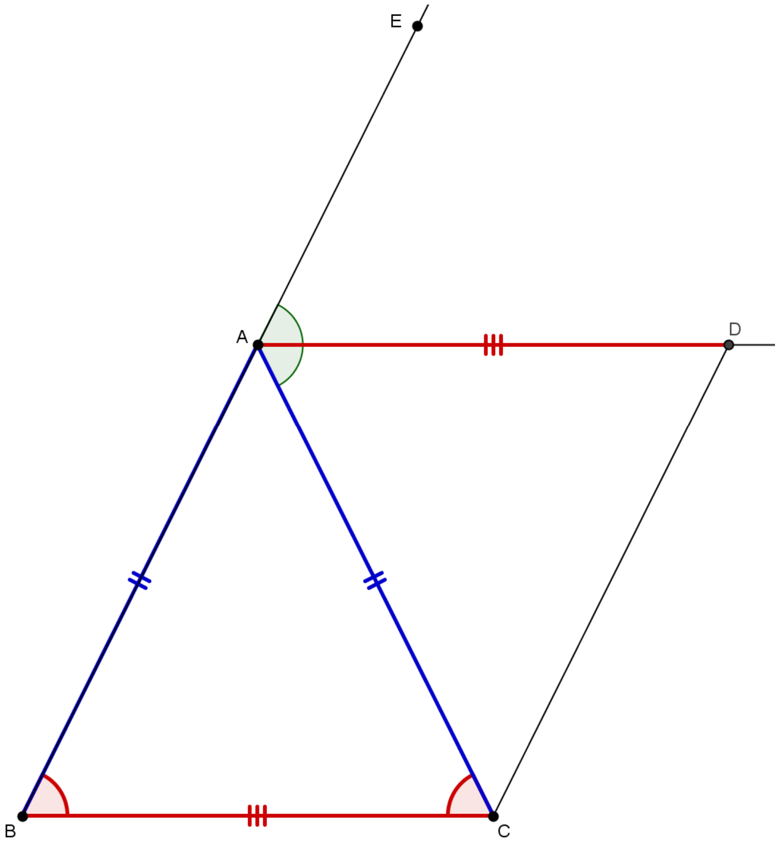
La congruenza $F\hat{E}A \cong E\hat{F}C \quad \Rightarrow \quad AE \parallel \mathrm{FC}$

Si conclude pertanto che AECF è un parallelogrammo.

Problema 2.296.11

Dato il triangolo isoscele ABC di base BC, si conduca la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A. Si prenda su tale bisettrice il segmento AD congruente alla base BC. Dopo aver dimostrato che AD è parallelo a BC, si deduca che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
$C\hat{A}D \cong D\hat{A}E$ $AB \cong AC$ $AD \cong BC$	$\Rightarrow$	$AD \parallel BC$ ABCD è un parallelogrammo



Dimostrazione

Per dimostrare che AD ∥ BC è sufficiente dimostrare che gli angoli alterni interni sono congruenti, cioè $C\hat{A}D \cong A\hat{C}B$

Osserviamo che l'angolo esterno $C\hat{A}E \cong \hat{B} + A\hat{C}B$.

Ma essendo, per ipotesi, $C\hat{A}D \cong D\hat{A}E$ e $\hat{B} \cong A\hat{C}B$ perché ABC è un triangolo isoscele,

si ha che: $C\hat{A}D \cong A\hat{C}B$.

Essendo $C\hat{A}D$ e $A\hat{C}B$ angoli alterni interni alle rette AD è BC e alla trasversale AC si conclude che AD ∥ BC .

Per dimostrare che ABCD è un parallelogrammo è sufficiente dimostrare che i triangoli ABC e ADC sono congruenti.

ABC ≅ ADC per il I C.C.T. Infatti:
AC è in comune
AD ≅ BC per ipotesi
$C\hat{A}D \cong A\hat{C}B$ per la dimostrazione precedente

Avendo dimostrato che ABC ≅ ADC, si ha deduce che gli angoli $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$.

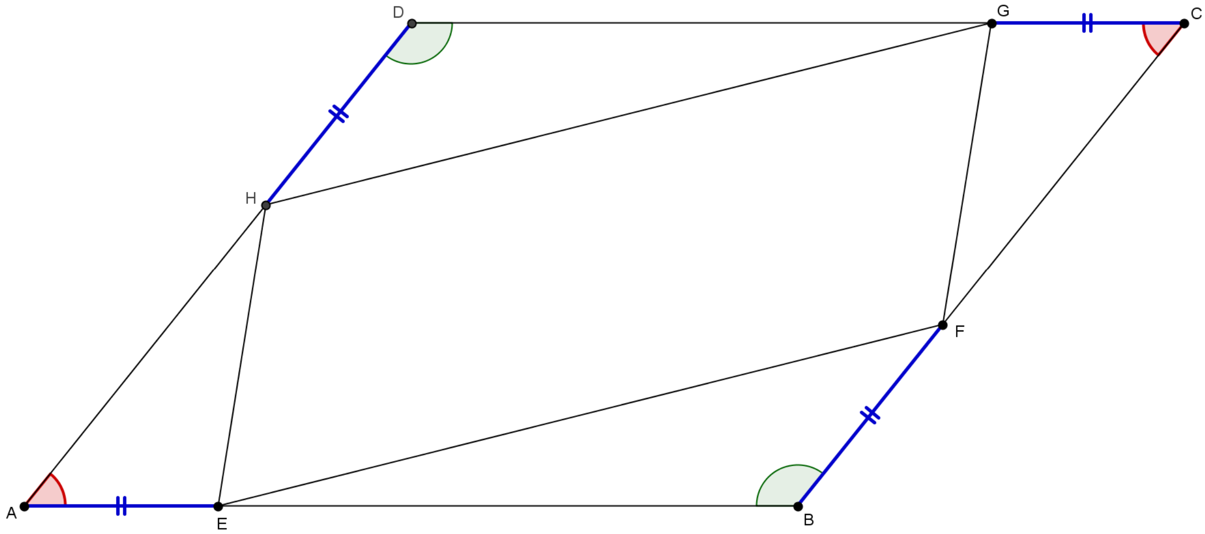
Essendo $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ angoli alterni interni alle rette AB è CD tagliate dalla trasversale AC, si conclude che AB ∥ CD.

In definitiva avendo dimostrato che il quadrilatero ABCD ha i lati opposti paralleli, risulta un parallelogrammo.

Problema 2.296.12

Si prendano su ciascun lato di un parallelogrammo ABCD i segmenti AE, BF, CG, DH fra loro congruenti. Si dimostri che il quadrilatero EFGH così ottenuto è un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
ABCD è un parallelogrammo $AE \cong BF \cong CG \cong DH$	$\Rightarrow$	EFGH è un parallelogrammo



Dimostrazione

I triangoli AHE e FGC sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
$AE \cong CG$ per ipotesi
$AH \cong CF$ perché differenza di segmenti congruenti
$\hat{A} \cong \hat{C}$ perché angoli opposti del parallelogrammo

Dalla congruenza dei triangoli AHE e FGC si ricava che $HE \cong GF$.

I triangoli DGH e EFB sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
$DH \cong BF$ per ipotesi
$DG \cong EB$ perché differenza di segmenti congruenti
$\widehat{D} \cong \widehat{B}$ perché angoli opposti del parallelogrammo

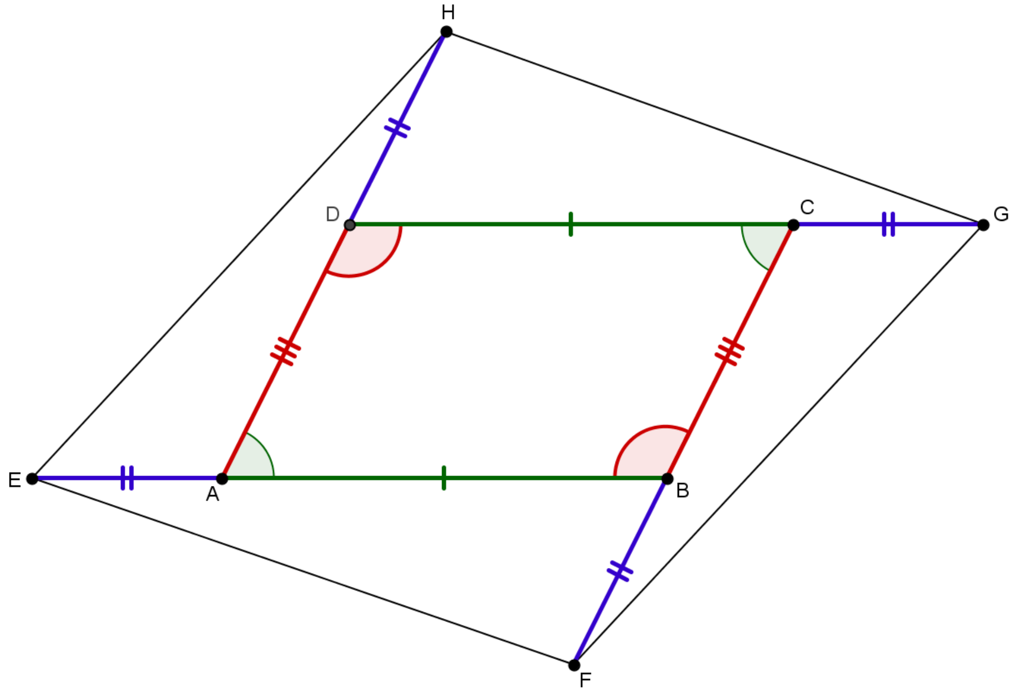
Dalla congruenza dei triangoli DGH e EFB si ricava che $HG \cong EF$.

Avendo dimostrato che il quadrilatero EFGH ha i lati opposti congruenti, per un teorema sul parallelogramma, si conclude che EFGH è un parallelogrammo.

Problema 2.296.13

Sia ABCD un parallelogrammo, si prolunghino i suoi lati di quattro segmenti AE, BF, CG e DH tra loro congruenti. Dimostrare che EFGH è un parallelogrammo.

IPOTESI		TESI
ABCD è un parallelogrammo $AE \cong BF \cong CG \cong DH$	$\Rightarrow$	EFGH è un parallelogrammo



Dimostrazione

I triangoli EHA e FCG sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
$AE \cong CG$ per ipotesi
$AH \cong CF$ perché somma di segmenti congruenti
$E\hat{A}H \cong F\hat{C}G$ perché supplementari degli angoli congruenti $B\hat{A}D$ e $D\hat{C}B$.

Dalla congruenza dei triangoli EHA e FCG si ricava che $HE \cong GF$.

I triangoli DHG e EBF sono congruenti per il I C.C.T. Infatti:
$DH \cong BF$ per ipotesi
$DG \cong EB$ perché somma di segmenti congruenti
$G\hat{D}H \cong E\hat{B}F$ perché supplementari degli angoli congruenti $A\hat{D}C$ e $C\hat{B}A$.

Dalla congruenza dei triangoli DHG e EBF si ricava che $HG \cong EF$.

Avendo dimostrato che il quadrilatero EFGH ha i lati opposti congruenti, per un teorema sul parallelogramma, si conclude che EFGH è un parallelogrammo.