PROBLEMI DI MAX E MIN

Esempio 1

Qual è il massimo prodotto che si può ottenere moltiplicando due numeri la cui somma è 26? Quali sono i due numeri il cui prodotto è massimo?

<u>Soluzione</u>

Poniamo il primo numero $= x$ *, il secondo numero vale* $26 - x$ *con* $x \in R$.

Il prodotto dei due numeri è espresso dalla funzione: $p(x) = x \cdot (26 - x)$.

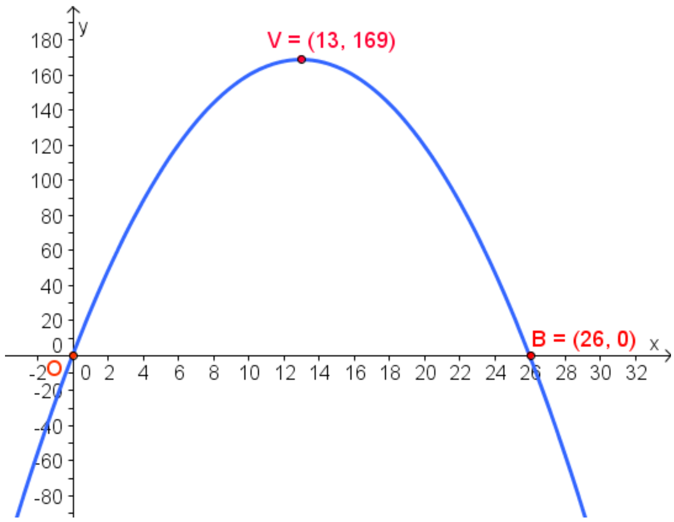
Esplicitando l'equazione si ottiene l'equazione della parabola: $p(x) = -x^2 + 26x$.

Essendo la parabola con concavità rivolta verso il basso, il valore massimo si ha nel vertice.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{26}{2 \cdot (-1)} = 13 .$$

$$y_V = -13^2 + 26 \cdot 13 = -169 + 338 = 169 .$$

Pertanto il massimo prodotto è uguale a 169 e si ottiene quando entrambi i numeri sono uguali a 13.



Esempio 2

Qual è il minimo prodotto che si può ottenere moltiplicando due numeri che differiscono di 7? Quali sono i due numeri il cui prodotto è minimo?

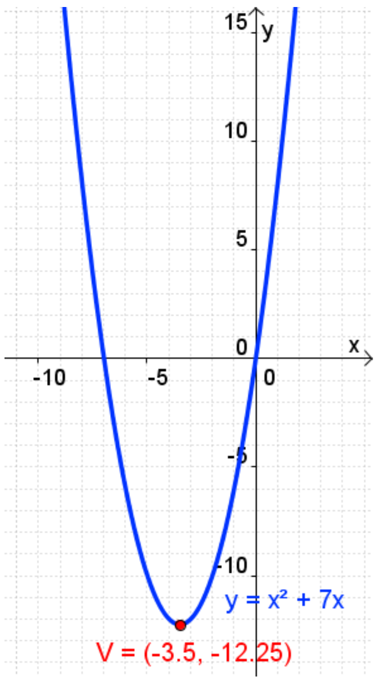
<u>Soluzione</u>

Poniamo il numero maggiore $= x$ *, il secondo numero vale* $x - 7$ *con* $x \in R$.

Il prodotto dei due numeri è espresso dalla funzione: $p(x) = x(x-7)$.

Esplicitando l'equazione si ottiene l'equazione della parabola: $p(x) = x^2 - 7x$.

Essendo la parabola con concavità rivolta verso l'alto,
il valore massimo si ha nel vertice.



$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot 1} = \frac{7}{2}.$$

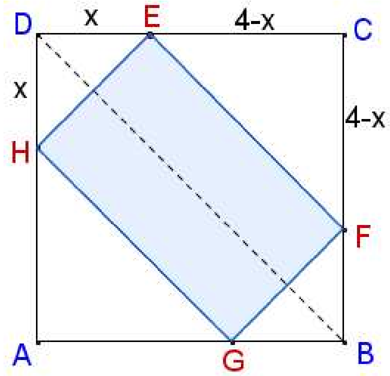
$$y_V = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} = \frac{49-98}{4} = -\frac{49}{4} \ .$$

Pertanto il minimo prodotto che si può ottenere è $-\frac{49}{4}$ *e si ottiene quando:*

il numero maggiore è $\frac{7}{2}$ *, mentre il numero minore è* $\frac{7}{2} - 7 = \frac{7-14}{2} = -\frac{7}{2}$.

Esempio 3

In una stanza da bagno occorre posizionare in uno spazio quadrato di lato 4 metri una vasca di forma rettangolare. I lati della vasca devono essere posti paralleli alla diagonale del quadrato. Quali devono essere le dimensioni della vasca affinché la sua superficie sia massima.



Soluzione

Poniamo la misura del segmento: $\overline{DE} = x$, *con* $0 < x < 4$.

Si ottiene la misura del segmento: $\overline{EC} = 4 - x$.

Dalle simmetrie presenti nella figura si ha che:

$$S_{EFGH} = S_{EFGH} - 2 \cdot S_{DEH} - 2 \cdot S_{CEF} ;$$

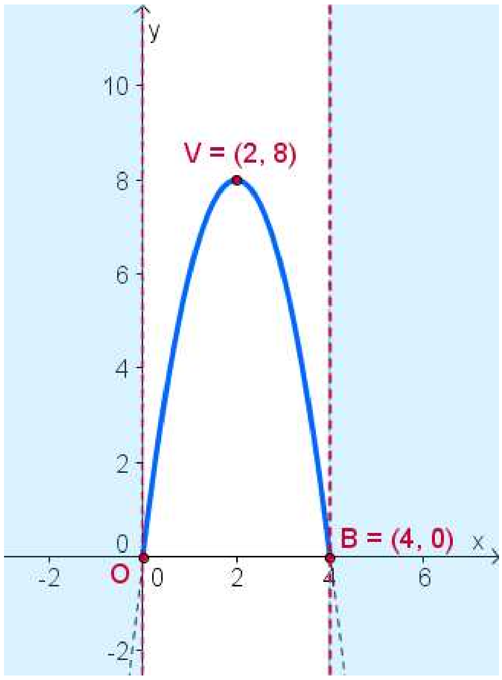
$$S_{EFGH} = 4^2 - 2 \cdot \frac{\overline{DE} \cdot \overline{DH}}{2} - 2 \cdot \frac{\overline{EC} \cdot \overline{CF}}{2} ;$$

$$S_{EFGH} = 16 - 2 \cdot \frac{x \cdot x}{2} - 2 \cdot \frac{(4-x) \cdot (4-x)}{2} ;$$

$$S_{EFGH} = 16 - x^2 - (4-x)^2 ;$$

$$S_{EFGH} = 16 - x^2 - 16 - x^2 + 8x ;$$

$$S_{EFGH} = -2x^2 + 8x .$$



Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2 .$$

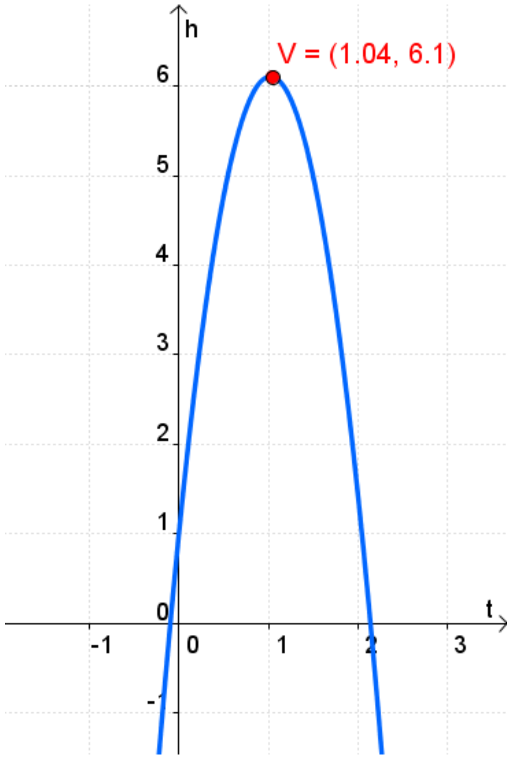
Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < 4$,
si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.

La superficie della vasca è massima per $x = 2$.

In altri termini la vasca di superficie massima è una vasca quadrata di lato 2 metri.

Esempio 4

Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto da un'altezza di $1\ m$ con una velocità iniziale $v_o = 10\ m/s$. In quale istante la palla raggiunge la massima altezza?



Soluzione

Dalla relazione : $h(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ *si ha:*

$h(t) = 1 + 10t + \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2$;

$h(t) = -4{,}9t^2 + 10t + 1$;

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

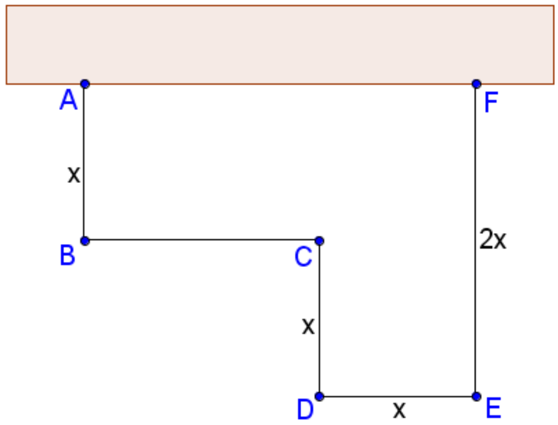
Pertanto il valore massimo si ha nel vertice.

$t_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-4{,}9)} \cong 1{,}02$.

La palla raggiunge la massima altezza dopo circa 1 secondo.

Esempio 5

Si vuole costruire un recinto dalla forma indicata in figura, intorno a un lato di una casa utilizzando 45 m di rete. Stabilisci per quali valori di x si ottiene il recinto di area massima.



<u>*Soluzione*</u>

Dalla figura si ha che:

$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE} = x$; $\overline{EF} = 2x$

Inoltre:

$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} < 45$;

$x + x + x + 2x < 45$;

$5x < 45$; $x < 9$.

Le limitazioni geometriche sono: $0 < x < 9$.

Determiniamo la misura di BC:

$\overline{BC} \;=\; p - \overline{AB} - \overline{CD} - \overline{DE} - \overline{EF} \;=$

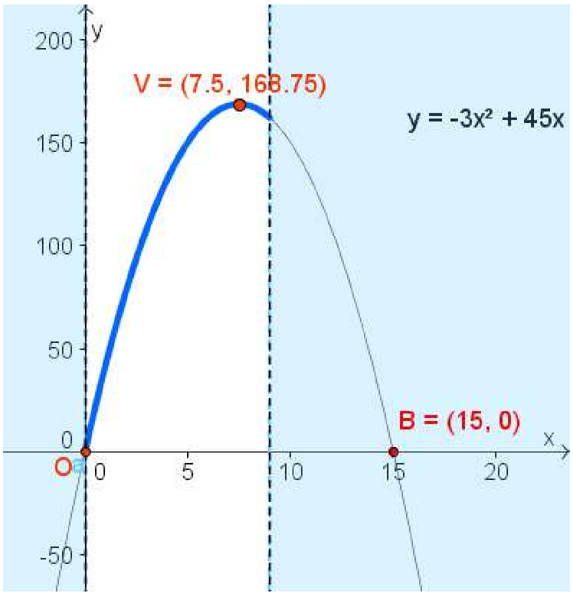
$= \; 45 - x - x - x - 2x \;=\; 45 - 5x$

L'area del recinto da rendere massima è:

$S(x) = \; x \cdot (45 - 5x) + 2x \cdot x$;

$S(x) = \; 45x - 5x^2 + 2x^2$;

$S(x) = \; -3x^2 + 45x$;



Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{45}{2 \cdot (-3)} = -\frac{45}{-6} = \frac{15}{2}.$$

$$y_V \;=\; -3\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 45 \cdot \frac{15}{2} \;=\; -3 \cdot \frac{225}{4} + \frac{675}{2} \;=\; -\frac{675}{4} + \frac{675}{2} \;=\; \frac{675}{4}.$$

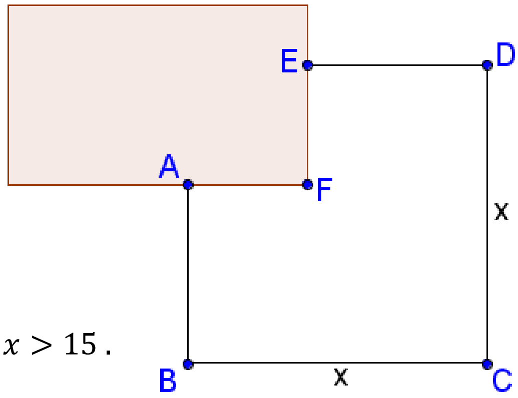
Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < 9$, *si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.*

Concludiamo che il recinto di area massima si ha per $x = \frac{15}{2}$.

L'area massima del recinto vale: $\frac{675}{4}$.

Esempio 6

Si vuole costruire un recinto dalla forma indicata in figura intorno a un lato di una casa utilizzando 60 m di rete. Sapendo che $\overline{AB} = \overline{ED}$ e $\overline{BC} = \overline{CD}$, stabilisci per quali valori di x si ottiene il recinto di area massima.



Soluzione

Poniamo: $\overline{BC} = \overline{CD} = x$;

Inoltre $\overline{AF} = \overline{EF}$. *Infatti:* $\overline{AF} = \overline{BC} - \overline{ED} = \overline{DC} - \overline{AB} = \overline{EF}$

Determiniamo le limitazioni:

$\overline{BC} + \overline{CD} < 60$; $\quad x + x < 60$; $\quad 2x < 60$; $\quad x < 30$.

Ma deve essere anche:

$\overline{BC} + \overline{CD} > \dfrac{60}{2}$; $\quad x + x > 30$; $\quad 2x > 30$; $\quad x > 15$.

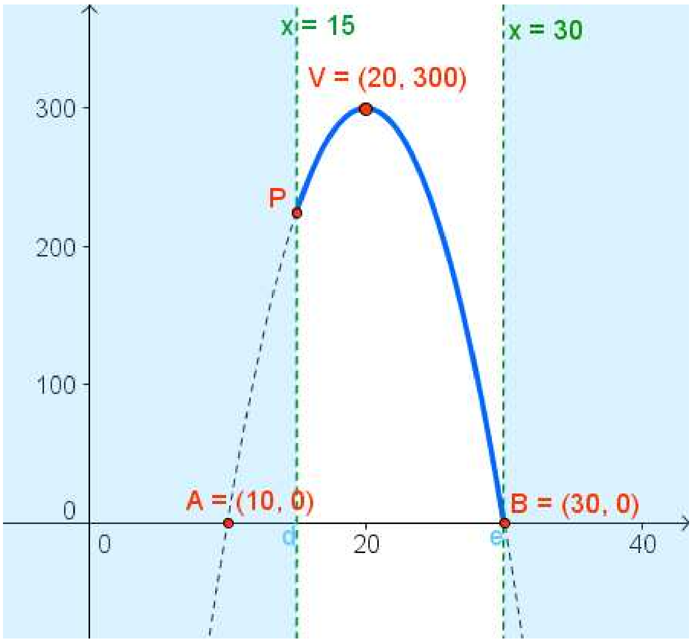
Pertanto le limitazioni geometriche sono: $15 < x < 30$.

Determiniamo la misura di AB:

$$\overline{AB} = \frac{p - \overline{BC} - \overline{CD}}{2} = \frac{60 - x - x}{2} = \frac{60 - 2x}{2} = 30 - x ;$$

$\overline{ED} = 30 - x$;

$\overline{AF} = \overline{BC} - \overline{ED} = x - (30 - x) = 2x - 30$.



L'area del recinto da rendere massima è:

$S(x) = x^2 - (2x - 30)^2$;

$S(x) = x^2 - 4x^2 - 900 + 120x$;

$S(x) = -3x^2 + 120x - 900$;

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2 \cdot (-3)} = 20 .$$

$$y_V = -3 \cdot 20^2 + 120 \cdot 20 - 900 = -1200 + 2400 - 900 = 300 .$$

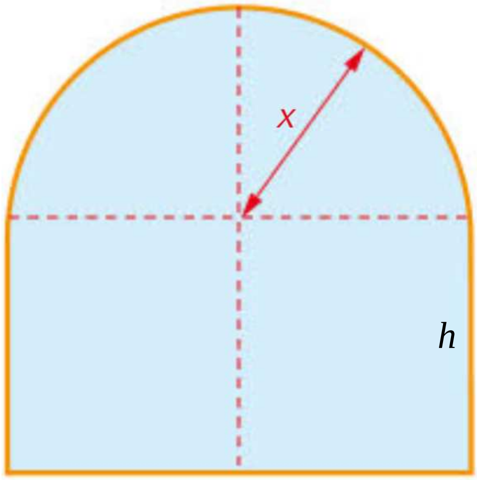
Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $15 < x < 30$, *si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.*

Concludiamo che il recinto di area massima si ha per $x = 20$.

L'area massima del recinto vale: 300.

Esempio 7

Una finestra è costituita da un rettangolo, sormontato da un semicerchio, di diametro coincidente con un lato del rettangolo. Il perimetro della finestra misura 24 m. Determina x in modo che dalla finestra entri la massima luce possibile.



Soluzione

Essendo il perimetro 24 m, la somma della base del rettangolo e del semicerchio deve essere minore di 24 m.

$2x + \pi x < 24$; $\quad (2+\pi)x < 24$; $\quad x < \dfrac{24}{2+\pi} \cong 4{,}67$.

Pertanto le limitazioni geometriche sono: $0 < x < \frac{24}{2+\pi}$.

Determiniamo la misura dell'altezza del rettangolo: $h = \frac{24-2x-\pi x}{2}$.

L'area della finestra da rendere massima è:

$S(x) = S_{Rettangolo} + S_{Semicerchio}$;

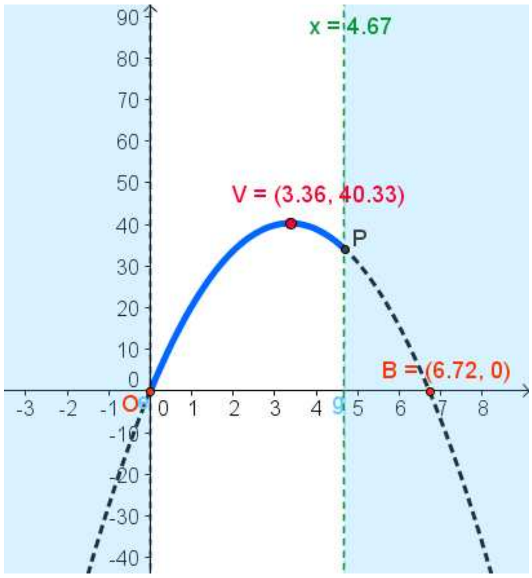
$S(x) = 2x \cdot \dfrac{24-2x-\pi x}{2} + \dfrac{1}{2}\pi x^2$;

$S(x) = x \cdot (24-2x-\pi x) + \dfrac{1}{2}\pi x^2$;

$S(x) = 24x - 2x^2 - \pi x^2 + \dfrac{1}{2}\pi x^2$;

$S(x) = \left(-\pi + \dfrac{1}{2}\pi - 2\right)x^2 + 24x$;

$S(x) = \left(-\dfrac{\pi}{2} - 2\right)x^2 + 24x$;



Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right)} = -\frac{24}{-\pi - 4} = \frac{24}{\pi + 4} \cong 3{,}36 .$$

Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < \frac{24}{2+\pi}$, *si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.*

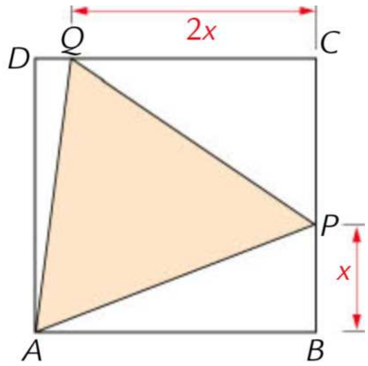
Concludiamo che dalla finestra entra la massima luce possibile per $x = 3{,}36\ m$.

L'area della finestra di massima luce è:

$S(x) = \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right) \cdot (3{,}36\,)^2 + 24 \cdot 3{,}36 \cong 40{,}34$.

Esempio 8

In un quadrato di lato 6 m della figura a lato si ha che $\overline{QC} = 2\,\overline{PB}$. Determina $\overline{PB}$, in modo che l'area del triangolo APQ sia minima.



<u>*Soluzione*</u>

Pertanto le limitazioni geometriche sono: $0 \leq x \leq 3$.

L'area del triangolo APQ da rendere minima è data da:

$S_{APQ} = S_{ABCD} - S_{ABP} - S_{CPQ} - S_{ADQ}$.

Si ottiene la funzione:

$$S(x) = 6^2 - \frac{1}{2}6x - \frac{1}{2}2x(6-x) - \frac{1}{2}6(6-2x) \ ;$$

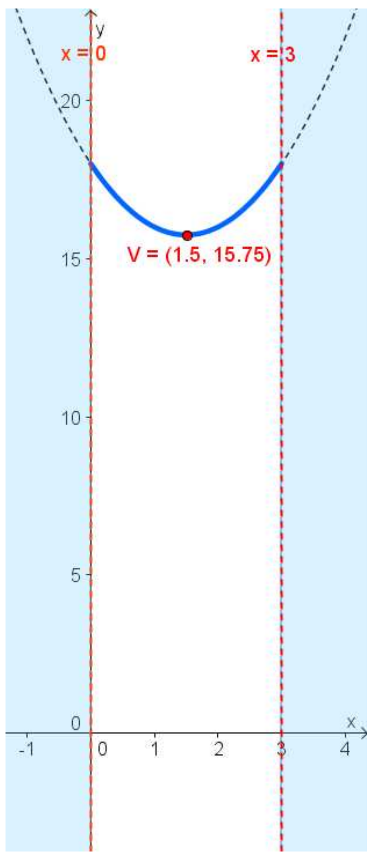
$S(x) = 36 - 3x - x(6-x) - 3(6-2x)$;

$S(x) = 36 - 3x - 6x + x^2 - 18 + 6x$;

$S(x) = x^2 - 3x + 18$;

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità positiva.

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$.



Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 \leq x \leq 3$, *si ricava che il valore minimo si ha nel vertice* *V* *della parabola.*
Concludiamo che l'area del triangolo è minima per $x = 1{,}5\ m$.

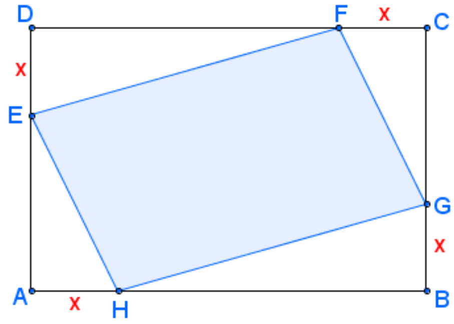
L'area massima vale:

$$S_{Max}(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 18 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 18 =$$

$$= \frac{9 - 18 + 72}{4} = \frac{63}{4} = 15{,}75 \ .$$

Esempio 9

I lati di un rettangolo ABCD sono lunghi $12\ cm$ e $8\ cm$. Facendo riferimento alla figura, determina qual è il minimo valore dell'area del parallelogramma EFGH .



Soluzione

Essendo $\overline{DE} = x$ *si ha:* $0 \leq x \leq 8$.

Dalle simmetrie presenti nella figura si ha che:

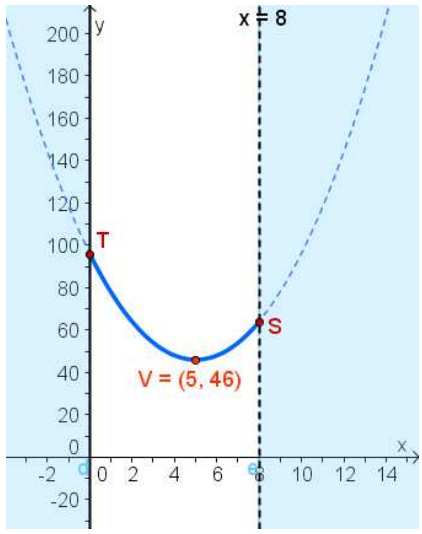
$S_{EFGH} = S_{ABCD} - 2 \cdot S_{AEH} - 2 \cdot S_{DEF}$;

$S_{EFGH} = 12 \cdot 8 - 2 \cdot \frac{x \cdot (8-x)}{2} - 2 \cdot \frac{(12-x) \cdot x}{2}$;

$S_{EFGH} = 96 - (8x - x^2) - (12x - x^2)$;

$S_{EFGH} = 96 - 8x + x^2 - 12x + x^2$;

$S_{EFGH} = 2x^2 - 20x + 96$.



Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità positiva.

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2 \cdot 2} = 5$.

Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 \leq x \leq 8$, *si ricava che il valore minimo si ha nel vertice V della parabola.*

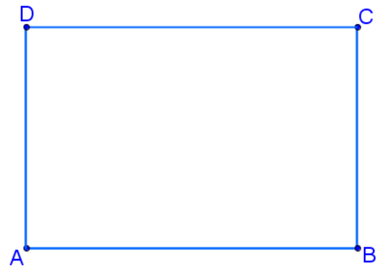
Concludiamo che l'area del parallelogramma EFGH è minima per $x = 5\ cm$.

Il minimo valore dell'area del parallelogramma EFGH è:

$S_{EFGH} = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 96 = 50 - 100 + 96 = 46$.

Esempio 10

Tra i rettangoli di perimetro assegnato $2p$, trova quello di area massima.



Soluzione

Poniamo la misura della base $\overline{AB} = x$, *con* $0 < x < p$

Si ha: $\overline{AD} = p - x$.

L'area del rettangolo ABCD da rendere massima è:

$S(x) = x \cdot (p - x)$;

$S(x) = -x^2 + px$;

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

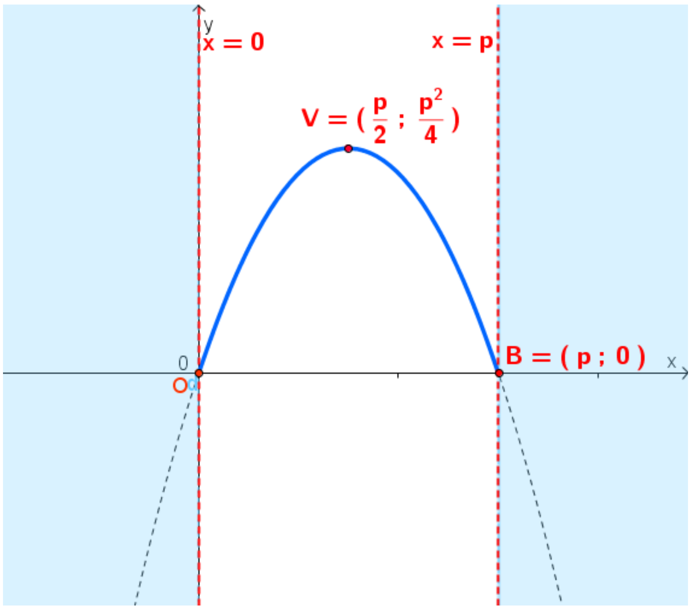
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot (-1)} = \frac{p}{2}.$$

$$y_V = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + p \cdot \frac{p}{2} = -\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{4}$$

Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < p$, *si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.*

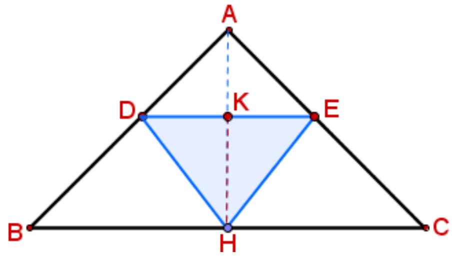
Pertanto la base è $\overline{AB} = \frac{p}{2}$ *e l'altezza è* $\overline{AD} = p - x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$.

Essendo $\overline{AB} = \overline{AD}$, *si conclude che il rettangolo di area massima di assegnato perimetro 2p è il quadrato di lato* $\frac{p}{2}$.



Esempio 11

In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, risulta $\overline{AC} = 10\ cm$ e $\overline{AB} = 12\ cm$. Si traccia una corda DE del triangolo, parallela ad AB. Determina DE in modo che l'area del triangolo DEH sia massima.

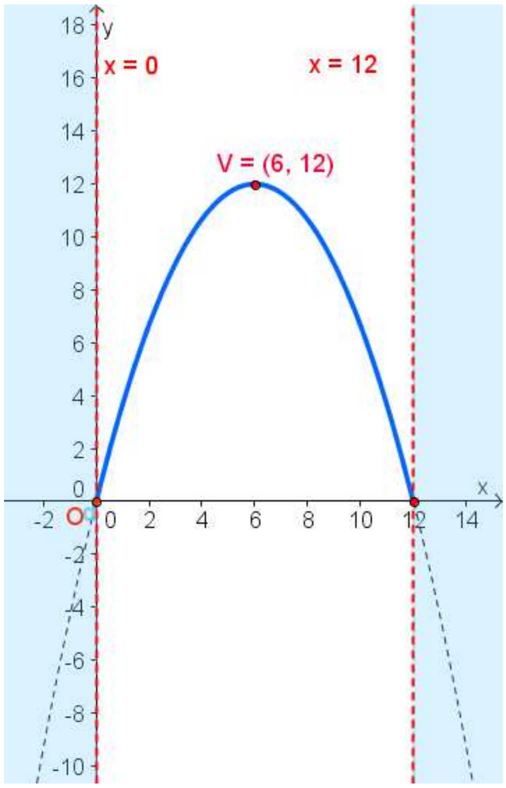


<u>*Soluzione*</u>

Calcoliamo la misura dell'altezza del triangolo ABC :

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{HC}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}\ cm = \sqrt{100 - 36}\ cm = \sqrt{64}\ cm = 8\ cm .$$

Poniamo la misura del corda $\overline{DE} = x$ *con* $0 < x < 12$.



Dalla similitudine dei triangoli ACH e AEK si ha:

$$\overline{AH} : \overline{AK} = \overline{HC} : \overline{KE} \ ; \qquad 8 : \overline{AK} = 6 : \frac{x}{2} \ ;$$

$$\overline{AK} = \frac{8 \cdot \frac{x}{2}}{6} \ ; \qquad \overline{AK} = \frac{2}{3}x \ .$$

Da cui si ha: $\overline{HK} = \overline{AH} - \overline{AK} = 8 - \frac{2}{3}x$.

L'area del triangolo DEH da rendere massima è:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{HK} \ ;$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(8 - \frac{2}{3}x\right) \ ;$$

$$S(x) = 4x - \frac{1}{3}x^2 \ ;$$

$$S(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x \ ;$$

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{4}{-\frac{2}{3}} = 6 .$$

Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < 12$, *si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.*

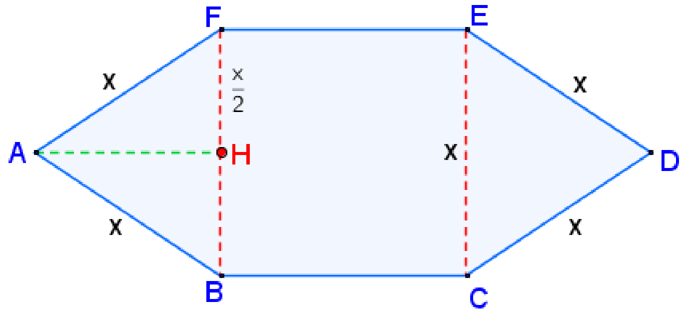
L'area del triangolo DEH risulta massima per $x = 6$ *:*

L'area del triangolo DEH di area massima è:

$$S(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4x = -\frac{1}{3} \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = -12 + 24 = 12 .$$

Esempio 12

La misura del perimetro dell'esagono ABCDEF è 24 e la misura dei lati dei triangoli equilateri ABF e CDE è x. Per quale valore di x l'area dell'esagono è massima?



Soluzione

Essendo $x+x+x+x<24$ *si ottiene:* $x<6$.

Pertanto le limitazioni geometriche sono: $0<x<6$.

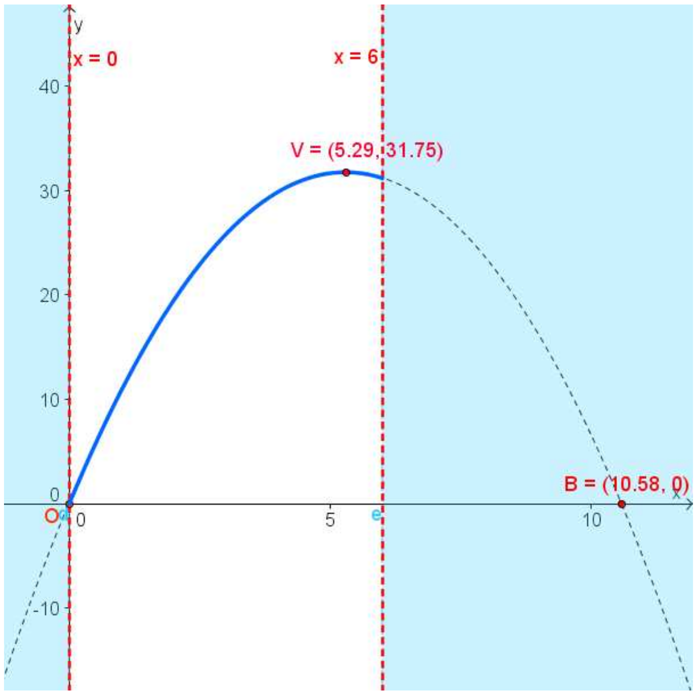
Calcoliamo la misura del lato BC :

$$\overline{BC} = \overline{EF} = \frac{24-4x}{2} = 12-2x\ .$$

Determiniamo la misura dell'altezza del triangolo equilatero ABF:

$$\overline{AH} = \sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\ .$$



L'area dell'esagono ABCDEF da rendere massima è:

$$S(x) = S_{BCEF} + 2\cdot S_{ABF}\ ;$$

$$S(x) = x\cdot(12-2x) + 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\ ;$$

$$S(x) = 12x-2x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\ ;$$

$$S(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right)x^2+12x\ ;$$

$$S(x) = \left(\frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)x^2+12x\ ;$$

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)} = -\frac{12}{\sqrt{3}-4} = \frac{12}{4-\sqrt{3}} \cong 5{,}29\ .$$

Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0<x<6$, *si ricava che il valore massimo si ha nel vertice V della parabola.*

L'area dell'esagono ABCDEF risulta massima per $x=\frac{12}{4-\sqrt{3}} \cong 5{,}29$ *:*

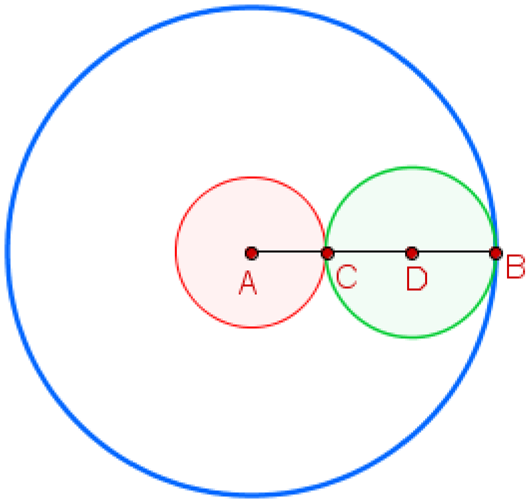
L'esagono ABCDEF ha area massima pari a $31{,}75$.

Esempio 13

Sia γ una circonferenza il cui raggio misura 5. Internamente a γ, disegna:

- **Una circonferenza γ^{I}, concentrica a γ;**
- **Una circonferenza γ^{II}, tangente a γ e γ^{I}.**

Determina il raggio di γ^{I} in modo che la somma delle aree dei due cerchi limitati da γ^{I} e γ^{II} sia minima.



Soluzione

Poniamo la misura del raggio $\overline{AC} = x$, $\quad con \ 0 < x < 5$.

Si ottiene la misura del raggio : $\overline{CD} = \frac{5-x}{2}$.

L'area da rendere minima è:

$S(x) = S_{Cerchio\ rosso} + S_{Cerchio\ verde}$;

$S(x) = \pi \cdot x^2 + \pi \cdot \left(\frac{5-x}{2}\right)^2$;

$S(x) = \pi x^2 + \frac{\pi}{4} \cdot (25 + x^2 - 10x)$;

$S(x) = \pi x^2 + \frac{25}{4}\pi + \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{5}{2}\pi x$;

$S(x) = \frac{5}{4}\pi x^2 - \frac{5}{2}\pi x + \frac{25}{4}\pi$;

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità positiva.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{5}{2}\pi}{2 \cdot \frac{5}{4}\pi} = \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{2}{5\pi} = 1 .$$

$$y_V = \frac{5}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{5}{2}\pi \cdot 1 + \frac{25}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi - \frac{5}{2}\pi + \frac{25}{4}\pi = \frac{5 - 10 + 25}{4}\pi = \frac{20}{4}\pi = 5\pi \cong 15{,}7 .$$

Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < 5$,

si ricava che il valore minimo si ha nel vertice V della parabola.

Pertanto la somma delle aree dei due cerchi limitati da γ^{I} *e* γ^{II} *risulta minima per* $x = 1$.