Esercizio 1

Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera traslata $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ passante per il punto $A\left(-\frac{1}{3};-4\right)$ e tangente nel punto $B(0;-2)$ alla retta $y = 4x - 2$.

<u>Soluzione</u>

Imponendo il passaggio per i punti A e B si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{-\frac{1}{3}a+b}{-\frac{1}{3}c+d} = -4 \\ \dfrac{b}{d} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3}a + b = -4 \cdot \left(-\frac{1}{3}c + d\right) \\ b = -2d \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3}a + b = \frac{4}{3}c - 4d \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -a + 3b - 4c + 12d = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + 3\cdot(-2d) - 4c + 12d = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -a - 6d - 4c + 12d = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -a - 4c + 6d = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a = -4c + 6d \\ b = -2d \end{cases}$$

Ponendo $c = 1$ *si ha:* $\begin{cases} a = 6d - 4 \\ b = -2d \end{cases}$ *ottenendo il fascio di iperboli:* $y = \frac{(6d-4)x - 2d}{x+d}$.

Risolvendo il sistema fra l'iperbole e la retta si ha:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(6d-4)x-2d}{x+d} \\ y = 4x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 2 = \dfrac{(6d-4)x-2d}{x+d} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} (4x-2)\cdot(x+d) = (6d-4)x - 2d \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 4dx - 2x - 2d - 6dx + 4x + 2d = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 2x - 2dx = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 2(1-d)x = 0 \\ - \end{cases}$$

e imponendo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$ *;* $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 0$ *; cioè* $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$ *(perché* $c = 0$ *) si ottiene:*

$(1-d)^2 = 0$; $1 - d = 0$; $d = 1$.

Pertanto l'equazione richiesta è: $y = \frac{(6\cdot 1 - 4)x - 2\cdot 1}{x+1}$; $y = \frac{2x-2}{x+1}$.