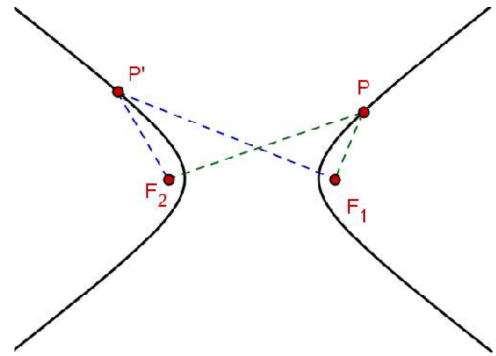
L'iperbole



L'**iperbole** è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti **fuochi**.

Come si evince del grafico, la differenza delle distanze $PF_1 - PF_2$ è:

positiva se P è più vicino a F_2

negativa se P è più vicino a F_1.

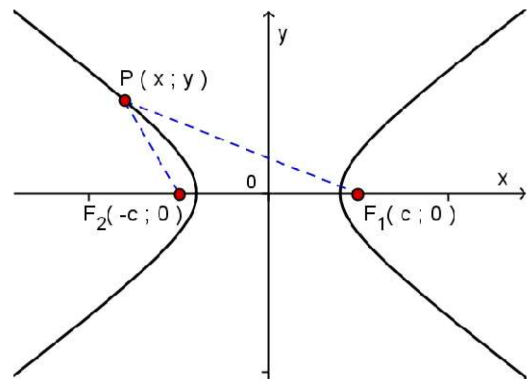
Pertanto, per includere entrambi i casi occorre utilizzare il valore assoluto.

$$|PF_1 - PF_2| = costante$$

Il punto medio del segmento F_1F_2 è detto **centro** dell'iperbole.

La distanza fra i fuochi F_1 e F_2 è detta **distanza focale**.

Iperbole riferita al centro e con i fuochi appartenenti all'asse x



Consideriamo l'iperbole che ha il centro nell'origine degli assi cartesiani e i fuochi $F_1(c\,;0)$ e $F_2(-c\,;0)$ sull'asse x.

Dalla definizione si ha che: $|PF_2 - PF_1| = 2a$

(*avendo indicato con* $2a > 0$ *la differenza costante*).

In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due. Pertanto, nel triangolo PF_1F_2, $\overline{F_1F_2} > PF_1 - PF_2$, $2c > 2a$, $\boldsymbol{c > a}$.

Indicato con $P(x\,;y)$ un generico punto del piano si ha:

$|PF_2 - PF_1| = 2a$;

$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$;

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \mp 2a$;

Risolviamo la prima equazione: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{x^2 + c^2 + 2cx + y^2} = 2a + \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + y^2}$; elevando ambo i membri al quadrato

$x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2cx + y^2 + 4a\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + y^2}$;

$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + y^2}$;

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + y^2}$;

$cx - a^2 = a\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + y^2}$; elevando ambo i membri al quadrato

$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2(x^2 + c^2 - 2cx + y^2)$;

$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2$;

$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$;

$c^2x^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$;

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0$;

Essendo $c > a$; $c^2 > a^2$; $c^2 - a^2 > 0$

Pertanto si può porre $c^2 - a^2 = b^2$ sostituendo si ha:

$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; dividendo per a^2b^2

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **Equazione canonica** o **normale** dell'iperbole a centro con i fuochi appartenenti all'asse x .

Si perviene a questa forma anche risolvendo la seconda equazione: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a$;

$\sqrt{x^2 + c^2 + 2cx + y^2} + 2a = \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + y^2}$;

$x^2 + c^2 + 2cx + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + c^2 + 2cx + y^2} = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$;

$4cx \quad 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + c^2 + 2cx + y^2} = 0$; $4cx + 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 + c^2 + 2cx + y^2}$;

$cx + a^2 = -a\sqrt{x^2 + c^2 + 2cx + y^2}$; $c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx = a^2(x^2 + c^2 + 2cx + y^2)$;

$c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx = a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2y^2$; $c^2x^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$;

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0$; ponendo $c^2 - a^2 = b^2$ *si ottiene* $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Proprietà 1

L'iperbole è una curva **simmetrica** rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine.

Infatti, poiché nell'equazione dell'iperbole sia la variabile x sia la variabile y compaiono solo elevate a potenza pari, se un punto $P_1(x\,;y)$ è un punto dell'iperbole, lo sono anche i punti $P_2(-x\,;y)$, $P_3(x\,;-y)$, $P_4(-x\,;-y)$ perché le loro coordinate ne verificano l'equazione, dato che $(\mp x)^2 = x^2$ e $(\mp y)^2 = y^2$.

Proprietà 2

I fuochi dell'iperbole hanno coordinate $F_1\left(+\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ 0\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ 0\right)$

L'iperbole interseca l'asse x nei punti $V_1(a\,;0)$ e $V_2(-a\,;0)$ detti **vertici** dell'iperbole.

L'iperbole non interseca l'asse y. I punti $V_3(0\,;\ b)$ e $V_4(0\,;-b)$ sono detti **vertici non reali** dell'iperbole.

Il segmento $\overline{V_1V_2} = 2a$ è detto **asse trasverso**. Il segmento $\overline{V_3V_4} = 2b$ è detto **asse non trasverso**.

Infatti risolvendo i due sistemi:

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \mp a \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ $\nexists (x;y) \in \mathrm{R}^2$

Proprietà 3

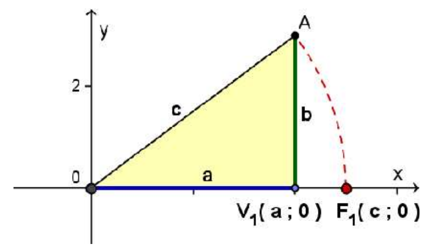
L'iperbole è una **curva illimitata**.

Riscrivendo l'equazione sotto la forma $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ si deduce che: $x^2 - a^2 \geq 0$ cioè $x \leq -a \ \vee\ x \geq a$.

I punti della curva si trovano quindi al di fuori della striscia limitata delle rette $x = -a$ e $x = a$, e quindi è formata da due rami.

Proprietà 4

La relazione $c^2 - a^2 = b^2$ può essere interpretata come la relazione del teorema di Pitagora applicata al triangolo OV_1A .



Proprietà 5

L'iperbole ha per **asintoti** le rette $y = \mp\frac{b}{a}x$.

Consideriamo le intersezioni dell'iperbole con una retta generica passante per l'origine:

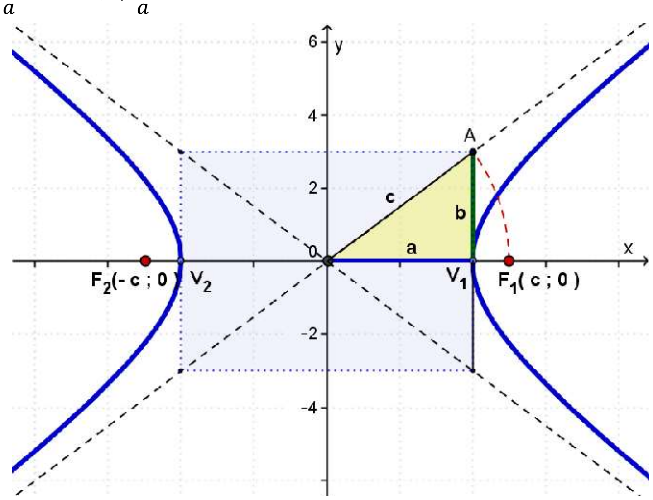
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$ si ottengono le soluzioni $\left(x = \mp\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad ; \quad y = \mp\frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \right)$

Queste soluzioni sono reali solo se $b^2 - a^2m^2 > 0$ cioè se $-\frac{b}{a} < m < +\frac{b}{a}$

L'iperbole è quindi intersecata da rette passanti per l'origine che si trovano all'interno dei due angoli opposti al vertice formati dalle rette $y = \mp\frac{b}{a}x$ e contenenti l'asse *x*.

Osserviamo inoltre che, assegnando al coefficiente angolare m, valori sempre più vicini a $\mp\frac{b}{a}$ l'espressione a denominatore $b^2 - a^2m^2$ diventa sempre più piccola, di conseguenza le frazioni $x = \mp\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$ e $y = \mp\frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$ diventano sempre più grandi.

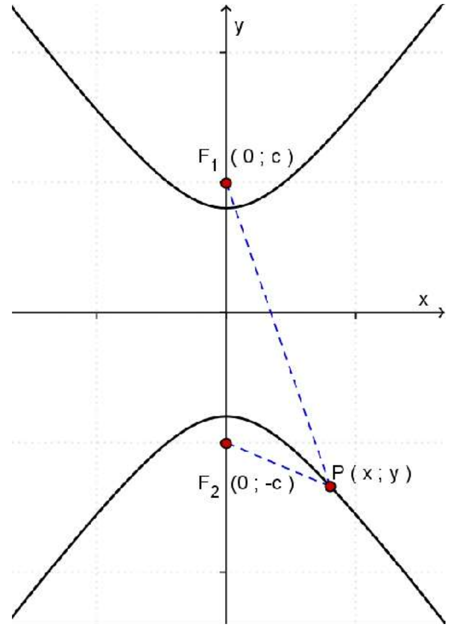
In casi come questi si dice che le rette $y = \mp\frac{b}{a}x$ intersecano la curva all'infinito (tali rette sono dette asintoti per la curva).



Proprietà 6

L'**eccentricità** dell'iperbole è il rapporto: $e = \frac{distanza\ focale}{asse\ trasverso} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$.

Iperbole riferita al centro e con i fuochi appartenenti all'asse y



Consideriamo l'iperbole che ha il centro nell'origine degli assi cartesiani e i fuochi sull'asse y.

I fuochi hanno coordinate $F_1(0\,;c)$ e $F_2(0\,;-c)$.

Dalla definizione si ha che: $|PF_1 - PF_2| = 2b$
(*avendo indicato con* $2b > 0$ *la differenza costante*).

Indicato con $P(x\,;y)$ un generico punto del piano si ha:

$\left|\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}\right| = 2b$;

$\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cy}-\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy} = \mp 2b$;

Risolviamo prima: $\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cy}-\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy} = 2b$;

$\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cy} = 2b+\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy}$;

elevando ambo i membri al quadrato

$x^2+y^2+c^2-2cy = 4b^2+x^2+y^2+c^2+2cy+4b\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy}$

$-4b^2-4cy = 4b\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy}$;

$-b^2-cy = b\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy}$;

$b^4+c^2y^2+2b^2cy = b^2(x^2+y^2+c^2+2cy)$;

$b^4+c^2y^2+2b^2cy = b^2x^2+b^2y^2+b^2c^2+2b^2cy$;

$b^4+c^2y^2-b^2x^2-b^2y^2-b^2c^2 = 0$;

$-b^2x^2+(c^2-b^2)y^2-b^2(c^2-b^2) = 0$;

In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due, pertanto dal triangolo PF_1F_2 si ha $\overline{F_1F_2} > |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|$

$2c > 2b$; $c > b$; $c^2 > b^2$; $c^2-b^2 > 0$. Pertanto si può porre $c^2-b^2 = a^2$

$-b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$; dividendo per $-a^2b^2$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = -1$ **Equazione canonica** o **normale** dell'iperbole a centro con i fuochi appartenenti all'asse y

Si perviene a questa forma anche risolvendo la seconda equazione: $\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cy}-\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy} = -2b$

$\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cy} = \sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy}-2b$;

$x^2+y^2+c^2-2cy = x^2+y^2+c^2+2cy+4b^2-4b\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy}$;

$4b\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy} = 4b^2+4cy$;

$b\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cy} = b^2+cy$;

$b^2(x^2+y^2+c^2+2cy) = b^4+c^2y^2+2b^2cy$;

$b^2x^2+b^2y^2+b^2c^2+2b^2cy = b^4+c^2y^2+2b^2cy$;

$b^2x^2+b^2y^2+b^2c^2-b^4-c^2y^2 = 0$;

$b^2x^2-(c^2-b^2)y^2+b^2(c^2-b^2) = 0$; ponendo $c^2-b^2 = a^2$

$b^2x^2-a^2y^2+a^2b^2 = 0$; $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = -1$.

Proprietà 1

L'iperbole è una curva **simmetrica** rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine.

Infatti, poiché nell'equazione dell'iperbole sia la variabile x sia la variabile y compaiono solo elevate a potenza pari, se un punto $P_1(x\,;y)$ è un punto dell'iperbole, lo sono anche i punti $P_2(-x\,;y)$, $P_3(x\,;-y)$, $P_4(-x\,;-y)$ perché le loro coordinate ne verificano l'equazione, dato che $(\mp x)^2 = x^2$ e $(\mp y)^2 = y^2$.

Proprietà 2

I fuochi dell'iperbole hanno coordinate $F_1\left(0\ ;\ +\sqrt{a^2+b^2}\right)$ e $F_2\left(0\ ;\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$

L'iperbole interseca l'asse y nei punti $V_3(0\,;b)$ e $V_4(0\,;-b)$ detti **vertici** dell'iperbole.

L'iperbole non interseca l'asse x. I punti $V_1(a\,;\,0)$ e $V_2(-a\,;0)$ sono detti **vertici non reali** dell'iperbole.

Il segmento $\overline{V_3V_4}=2b$ è detto **asse trasverso**. Il segmento $\overline{V_1V_2}=2a$ è detto **asse non trasverso**.

Proprietà 3

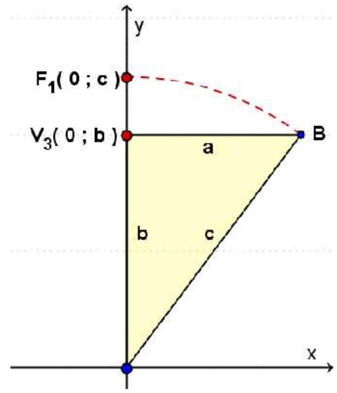
L'iperbole è una **curva illimitata**.

Riscrivendo l'equazione sotto la forma $x^2=\frac{a^2}{b^2}(y^2-b^2)$ si deduce che: $y^2-b^2\geq 0$ cioè $y\leq -b$ $\vee$ $y\geq b$.

I punti della curva si trovano quindi al di fuori della striscia limitata delle rette $y=-b$ e $y=b$, e quindi è formata da due rami.

Proprietà 4

La relazione $c^2-b^2=a^2$ può essere interpretata come la relazione del teorema di Pitagora applicata al triangolo OV_1A .



Proprietà 5

L'iperbole ha per **asintoti** le rette $y=\mp\frac{b}{a}x$.

Consideriamo le intersezioni dell'iperbole con una retta generica passante per l'origine:

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\\ y=mx+\end{cases}$ si ottengono le soluzioni

$\left(x=\mp\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\quad;\quad y=\mp\frac{mab}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$.

Queste soluzioni sono reali solo se $a^2m^2-b^2>0$ cioè se

$m<-\frac{b}{a}$ $\vee$ $m>+\frac{b}{a}$

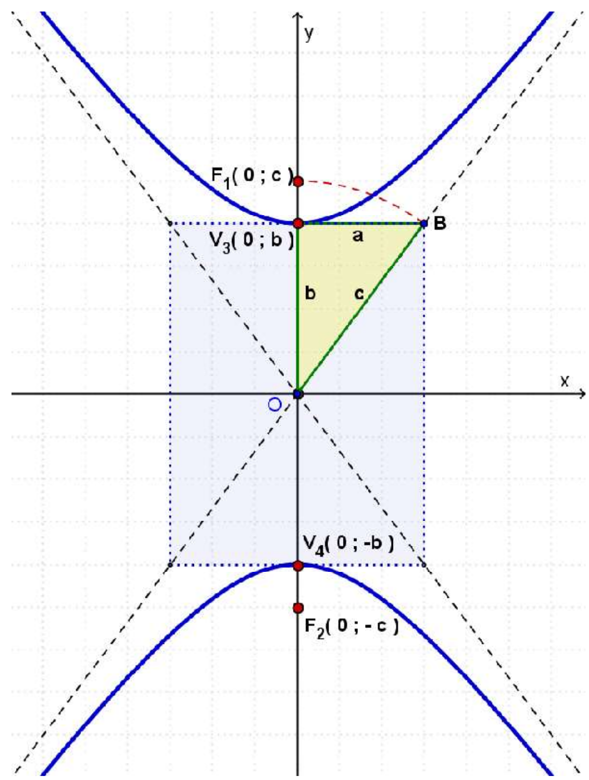
L'iperbole è quindi intersecata da rette passanti per l'origine che si trovano all'esterno dei due angoli opposti al vertice formati dalle rette $y=\mp\frac{b}{a}x$ e contenenti l'asse x.

Osserviamo inoltre che, assegnando al coefficiente angolare m, valori sempre più vicini a $\mp\frac{b}{a}$ l'espressione a denominatore $a^2m^2-b^2$ diventa sempre più piccola, di conseguenza le frazioni

$x=\mp\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}$ e $y=\mp\frac{mab}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}$

diventano sempre più grandi.

In casi come questi si dice che le rette $y=\mp\frac{b}{a}x$ intersecano la curva all'infinito (tali rette sono dette asintoti per la curva).



Proprietà 6

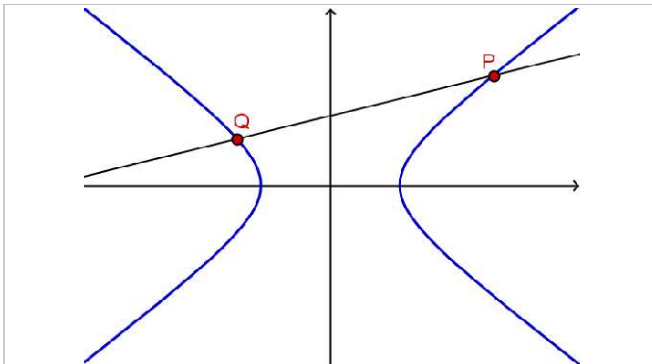
L'**eccentricità** dell'iperbole è il rapporto: $e=\frac{distanza\ focale}{asse\ trasverso}=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}>1$.

Posizioni di una retta rispetto a un’iperbole

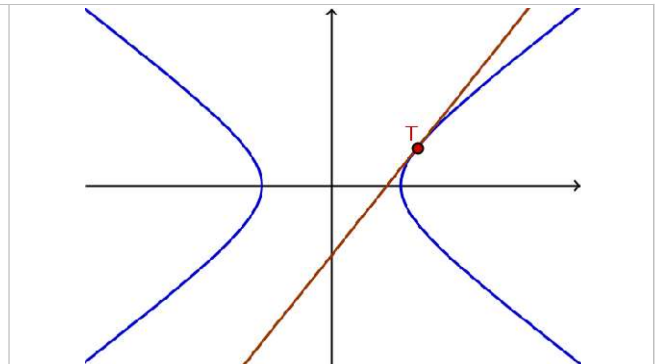
Per stabilire la posizione di una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$ rispetto a un’iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ occorre considerare il sistema formato dalle due equazioni:

$$\begin{cases} a'x + b'y + c' = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

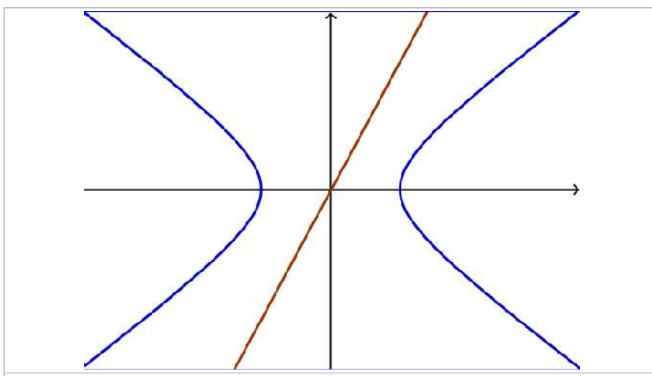
1. Se l’equazione risolvente è di II grado, si studia il segno del discriminante:
   - Se $\Delta > 0$, la retta è secante l’iperbole in due punti;
   - Se $\Delta = 0$, la retta è tangente l’iperbole in un punto;
   - Se $\Delta < 0$, la retta è esterna all’iperbole;
2. Se l’equazione risolvente è di I grado, la retta è secante l’iperbole in un solo punto.



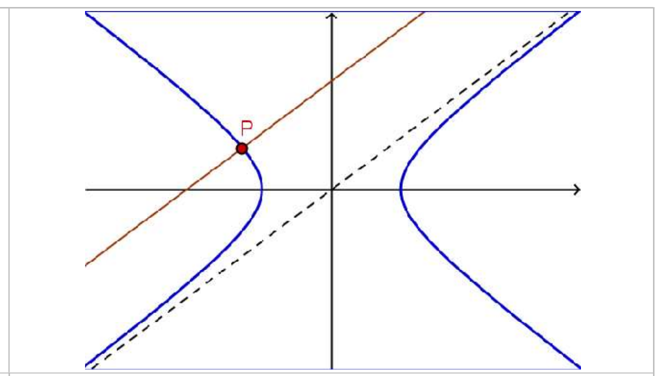
La retta è secante l’iperbole in due punti



La retta è tangente l’iperbole in un punto
(la retta non è parallela agli asintoti)



La retta è esterna all’iperbole



La retta è secante l’iperbole in un punto
(la retta è parallela a un asintoto)

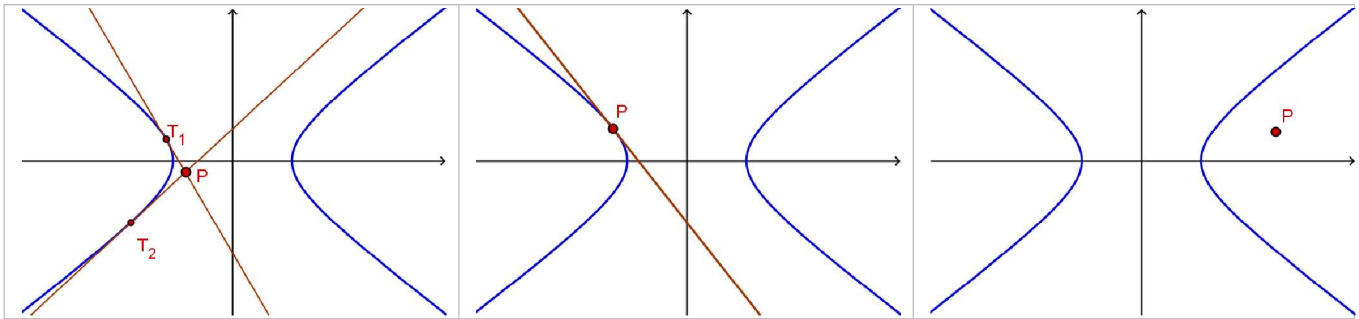
Tangenti a un'iperbole

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte da un punto $P(x_P\ ;\ y_P)$ ad una iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ occorre considerare il sistema formato dalle due equazioni:

$$\begin{cases} y-y_P=m(x-x_P) \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

1. si ricava l'equazione risolvente di II grado nella variabile x oppure y
2. si pone la condizione di tangenza $\Delta=0$;
3. si risolve l'equazione di II grado rispetto nell'incognita m;
    a. Se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due (*il punto P è esterno all'iperbole*);
    b. Se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una (*il punto P appartiene all'iperbole*);
    c. Se $\nexists\ m_1, m_2$, non esistono rette tangenti (*il punto P è interno all'iperbole*);

Nota: Se il punto P appartiene a un asintoto, allora fra le equazioni delle tangenti c'è anche l'equazione dell'asintoto stesso (*gli asintoti sono considerati tangenti all'iperbole all'infinito*).



Due rette tangenti	Una retta tangente	Nessuna retta tangente

Formula di sdoppiamento

Per determinare l'equazione della retta tangente all'iperbole in un suo punto $T(x_T\ ;\ y_T)$ si possono utilizzare le formule di sdoppiamento.

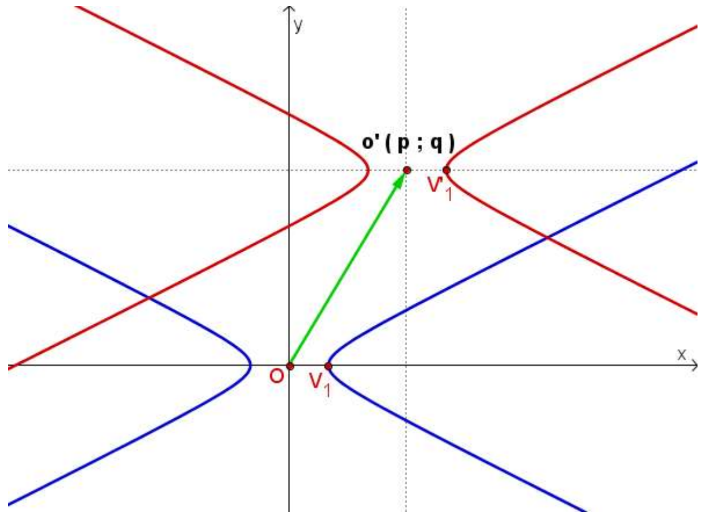
È sufficiente effettuare le seguenti sostituzioni nell'equazione dell'iperbole :

$x_T \cdot x$ al posto di x^2 $\qquad$ $y_T \cdot y$ al posto di y^2 .

Iperbole traslata

TEOREMA

L'equazione di una iperbole con centro nel punto $O'(p\,;\,q)$ *e assi paralleli agli assi cartesiani è del tipo :*	$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$



Dimostrazione

Consideriamo l'iperbole a centro di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Effettuiamo la traslazione di vettore $\vec{v}\,(p\,,q)$ della iperbole portando il centro dell'iperbole $O(0\,;0)$ nel punto $O'(p\,;q)$.

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$.

Utilizzando le equazioni inverse: $\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$

si ottiene l'equazione:

$$\frac{(x'-p)^2}{a^2} - \frac{(y'-q)^2}{b^2} = 1\,.$$

Eliminando gli apici, si ottiene $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} - \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

Il **centro** di simmetria ha coordinate:	$O'(p\,;\,q)$
Gli **asintoti** hanno equazioni:	$y - q = +\frac{b}{a}(x-p)$ e $y - q = -\frac{b}{a}(x-p)$
I **vertici** hanno coordinate:	$V_1\,(p+a;\;q)$ $V_2\,(p-a;\;q)$ $V_3\,(p;\;q+b)$ $V_4\,(p;\;q-b)$
I **fuochi** hanno coordinate:	$F_1\,(p+c\,;q)$ $F_2\,(p-c\,;q)$

L'equazione ottenuta può essere riscritta anche in altra forma:

$b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$;

$b^2(x^2+p^2-2px)^2 - a^2(y^2+q^2-2qy)^2 = a^2b^2$;

$b^2x^2 + b^2p^2 - 2b^2px - a^2y^2 - a^2q^2 + 2a^2qy = a^2b^2$;

$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2px + 2a^2qy + b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2 = 0$;

ponendo $\begin{cases} b^2 = A \\ -a^2 = B \\ -2b^2p = C \\ +2a^2q = D \\ b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2 = E \end{cases}$ si ottiene l'equazione $\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$ *con A e B discordi*.

L'equazione dell'iperbole traslata è un'equazione di II grado in x e y con i coefficienti dei termini di secondo grado di segno opposto (A $= b^2$ e B $= -a^2$).

Gli **assi di simmetria** hanno equazione:	$x = -\dfrac{C}{2A}$ *e* $y = -\dfrac{D}{2B}$
Le coordinate del **centro di simmetria** sono:	$O' = \left(p = -\dfrac{C}{2A}\;;\;q = -\dfrac{D}{2B}\right)$
Infatti: $\begin{cases} b^2 = A \\ -a^2 = B \\ -2b^2p = C \\ +2a^2q = D \\ b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2 = E \end{cases}$	$\begin{cases} p = -\frac{C}{2b^2} = -\frac{C}{2A} \\ \\ q = \frac{D}{2a^2} = -\frac{D}{2B} \end{cases}$

Il medesimo ragionamento è valido per l'iperbole con l'asse trasverso parallelo all'asse y.

TEOREMA INVERSO

Dimostriamo adesso il teorema inverso, cioè che:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ *con A e B discordi*	rappresenta l'equazione di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani

Dimostrazione

Consideriamo l'equazione: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Sostituiamo $A = b^2$ e $B = -a^2$ per avere evidenti informazioni sui segni dei due coefficienti:

$b^2x^2 - a^2y^2 + Cx + Dy + E = 0$

Raccogliamo parzialmente: $b^2\left(x^2 + \frac{C}{b^2}x\right) - a^2\left(y^2 + \frac{D}{-a^2}y\right) + E = 0$

Sommiamo e sottraiamo il quadrato della metà del coefficiente del termine di primo grado:

$$b^2\left(x^2 + \frac{C}{b^2}x + \frac{C^2}{4b^4} - \frac{C^2}{4b^4}\right) - a^2\left(y^2 + \frac{D}{-a^2}y + \frac{D^2}{4a^4} - \frac{D^2}{4a^4}\right) + E = 0$$

$$b^2\left(x^2 + \frac{C}{b^2}x + \frac{C^2}{4b^4}\right) - a^2\left(y^2 + \frac{D}{-a^2}y + \frac{D^2}{4a^4}\right) - \frac{C^2}{4b^2} - \frac{D^2}{4a^2} + E = 0$$

$$b^2\left(x + \frac{C}{2b^2}\right)^2 - a^2\left(y + \frac{D}{-2a^2}\right)^2 = \frac{C^2}{4b^2} + \frac{D^2}{4a^2} - E$$

Poniamo: $\frac{C^2}{4b^2} + \frac{D^2}{4a^2} - E = \delta$ otteniamo: $b^2\left(x + \frac{C}{2b^2}\right)^2 - a^2\left(y + \frac{D}{-2a^2}\right)^2 = \delta$

Si possono verificare tre casi:

$\boldsymbol{\delta} > 0$	$\boldsymbol{\delta} < 0$	$\boldsymbol{\delta = 0}$
Dividiamo i due membri per $+\delta > 0$ $$\frac{\left(x + \frac{C}{2b^2}\right)^2}{\frac{\delta}{b^2}} - \frac{\left(y + \frac{D}{-2a^2}\right)^2}{\frac{\delta}{a^2}} = 1$$	*Dividiamo i due membri per* $-\delta > 0$ $$\frac{\left(x + \frac{C}{2b^2}\right)^2}{\frac{\delta}{b^2}} - \frac{\left(y + \frac{D}{-2a^2}\right)^2}{\frac{\delta}{a^2}} = -1$$	$$b^2\left(x + \frac{C}{2b^2}\right)^2 - a^2\left(y + \frac{D}{-2a^2}\right)^2 = 0$$
Iperbole con asse trasverso parallelo all'asse x *Centro in* $\left(-\frac{C}{2b^2}\ ;\ -\frac{D}{-2a^2}\right)$ *cioè nel punto* $O'\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right)$	*Iperbole con asse trasverso parallelo all'asse y* *Centro in* $\left(-\frac{C}{2b^2}\ ;\ -\frac{D}{-2a^2}\right)$ *cioè nel punto* $O'\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right)$	*Iperbole degenere* *Coppia di rette passanti per il punto* $\left(-\frac{C}{2b^2}\ ;\ -\frac{D}{-2a^2}\right)$ *cioè per il punto* $\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right)$

Esempio 1

Traccia il grafico della curva di equazione: $4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$

Metodo - Completamento del quadrato

$4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$

$4(x^2 + 2x) - 9(y^2 + 8y) - 464 = 0$;

$4(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 + 8y + 16) - 464 = 4 - 144$;

$4\,(x+1)^2 - \,9\,(y+4)^2 = 324$;

$\dfrac{(x+1)^2}{81} - \dfrac{(y+4)^2}{36} = 1$; $\quad$ *che è del tipo* $\quad \dfrac{(x-p)^2}{a^2} - \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

Si tratta di una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse x immagine dell'iperbole $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$ *nella traslazione di vettore* $\vec{v}\,(-1\,;\,-4)$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(\,p\,;\,q)$ *cioè* $O'(-1\,;\,-4)$.

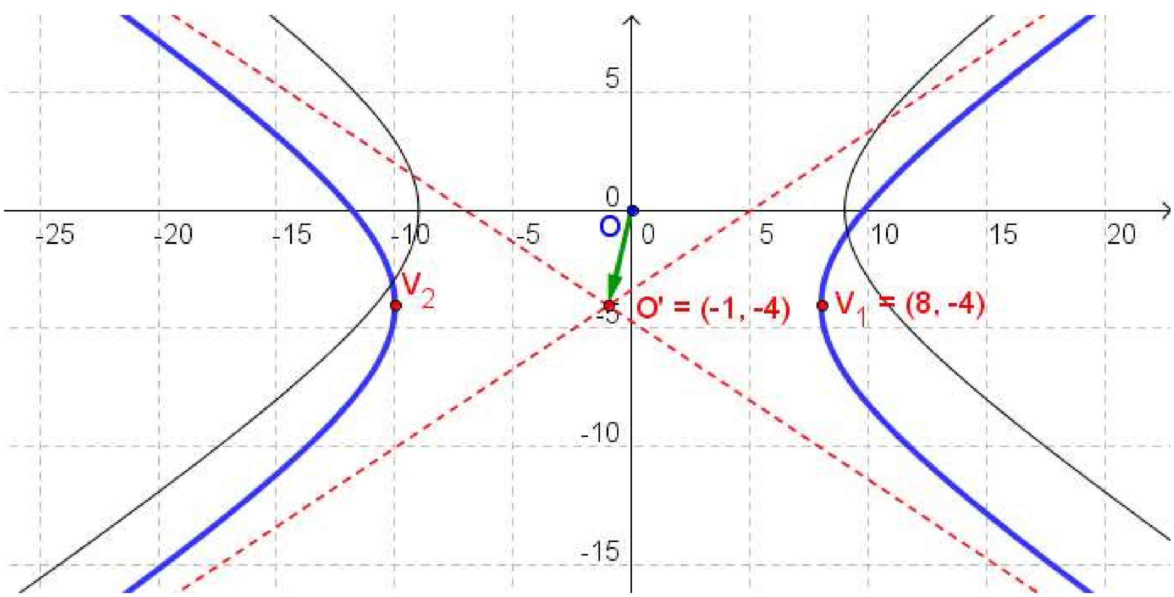
I vertici reali hanno coordinate:

$V_1\,(p+a;\;q)$ $\quad V_2\,(p-a;\;q)$ *cioè* $V_1\,(-1+9;\,-4)$ $\quad V_2\,(-1-9;\,-4)$ *cioè* $V_1\,(8\,;\,-4)$ $\quad V_2\,(-10;\,-4)$

Gli asintoti hanno equazione:

$y - q = \pm\dfrac{b}{a}(x-p)$; $\qquad y + 4 = \pm\dfrac{6}{9}(x+1)$; $\qquad y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{14}{3}$ $\quad y = +\dfrac{2}{3}x - \dfrac{10}{3}$

Il suo grafico è il seguente:



Esempio 2

Traccia il grafico della curva di equazione: $\mathbf{2x^2 - y^2 - 8x - 8y - 4 = 0}$

Metodo - Completamento del quadrato

$2x^2 - y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$

$2(x^2 - 4x) - (y^2 + 8y) - 4 = 0$;

$2(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) - 4 = 4 - 16$;

$2\,(x-2)^2 - \,(y+4)^2 = -8$;

$\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+4)^2}{8} = -1$; $\quad$ *che è del tipo* $\quad \dfrac{(x-p)^2}{a^2} - \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = -1$

Si tratta di una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse y immagine dell'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -1$ *nella traslazione di vettore* $\vec{v}\,(2\,;\,-4)$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(\,p\,;\,q)$ *cioè* $O'(\,2\,;\,-4)$.

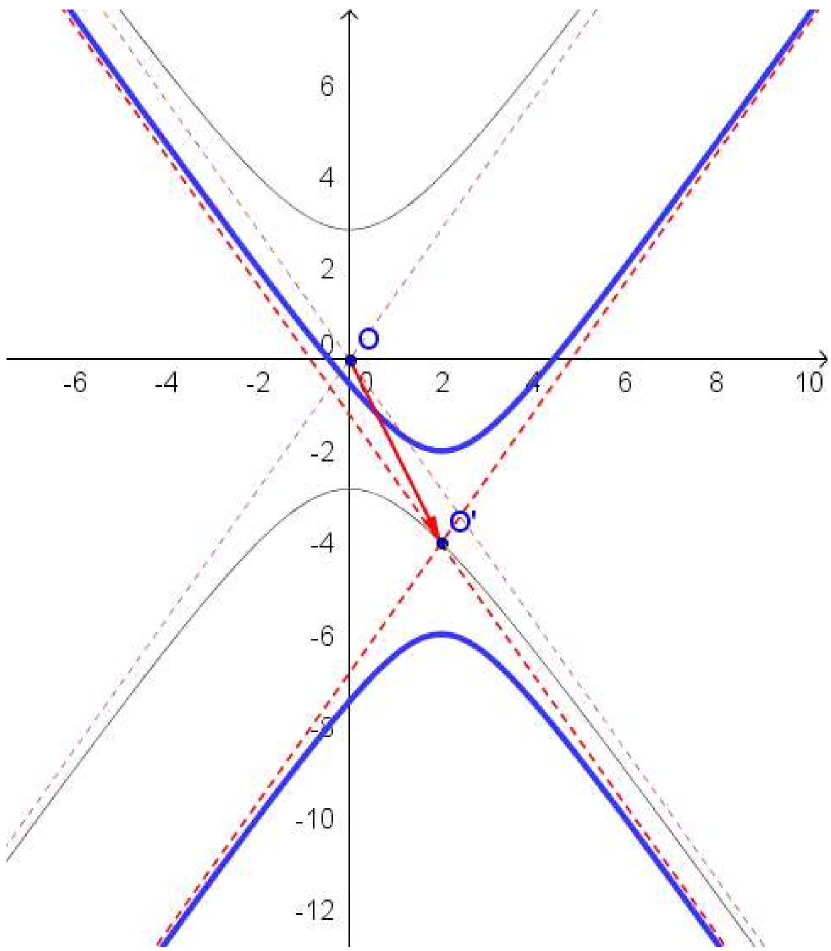
I vertici reali hanno coordinate:

$V_3\,(p;\ q+b)$ $\quad V_4\,(p;\ q-b)$ *cioè* $V_3\,(2;\,-4+2)$ $\quad V_4\,(2;\,-4-2)$ *cioè* $V_3\,(2;\,-2)$ $\quad V_4\,(2;\,-6)$

Gli asintoti hanno equazione:

$y - q = \pm\dfrac{b}{a}(x-p)\,;$ $\quad y + 4 = \pm\dfrac{\sqrt{8}}{2}(x-2)\,;$ $\quad y + 4 = \pm\sqrt{2}(x-2)\,;$ $\quad \begin{matrix} y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 4 \\ y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 4 \end{matrix}$

Il suo grafico è il seguente:



Esempio 3

Traccia il grafico della curva di equazione: $\boldsymbol{9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 10}$

<u>Metodo - Completamento del quadrato</u>

$9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 108 = 0$

$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 6y) - 108 = 0$;

$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) - 108 = 36 - 144$;

$9\,(x-2)^2 - 16\,(y-3)^2 = 0$;

$[3(x-2)]^2 - [4(y-3)]^2 = 0$;

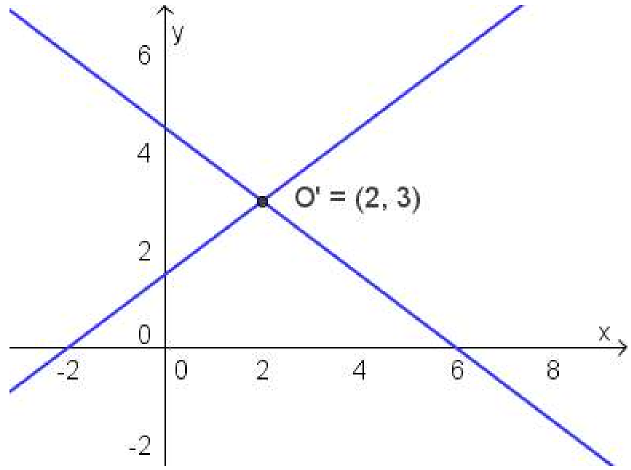
$[3(x-2) + 4(y-3)] \cdot [3(x-2) - 4(y-3)] = 0$

$(3x - 6 + 4y - 12) \cdot (3x - 6 - 4y + 12) = 0$

$3x + 4y - 18 = 0$

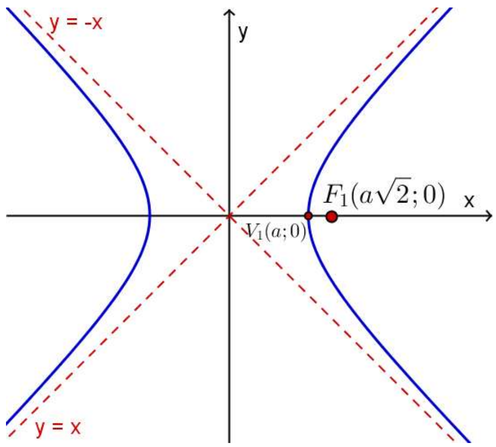
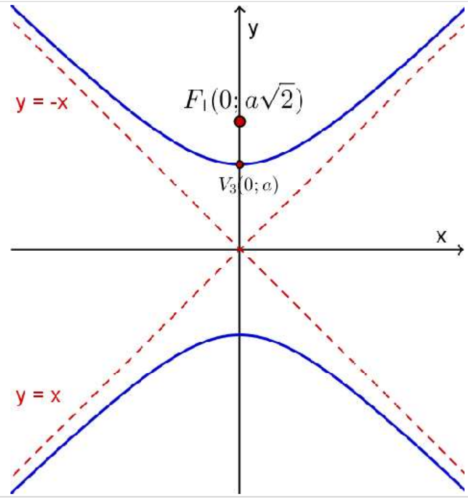
$(3x + 4y - 18) \cdot (3x - 4y + 6) = 0$;

$3x - 4y + 6 = 0$



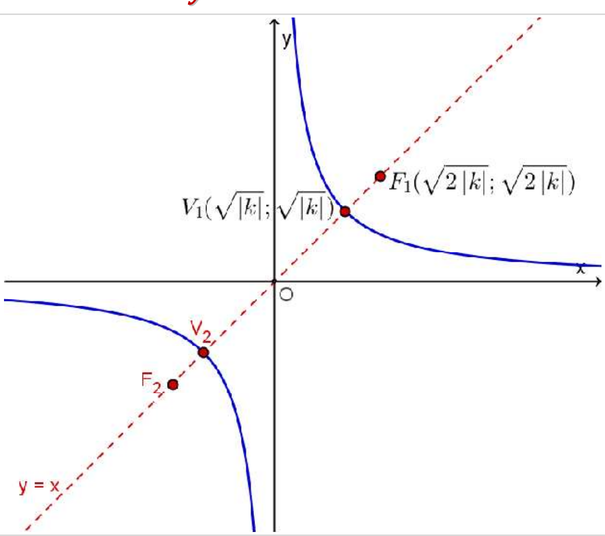
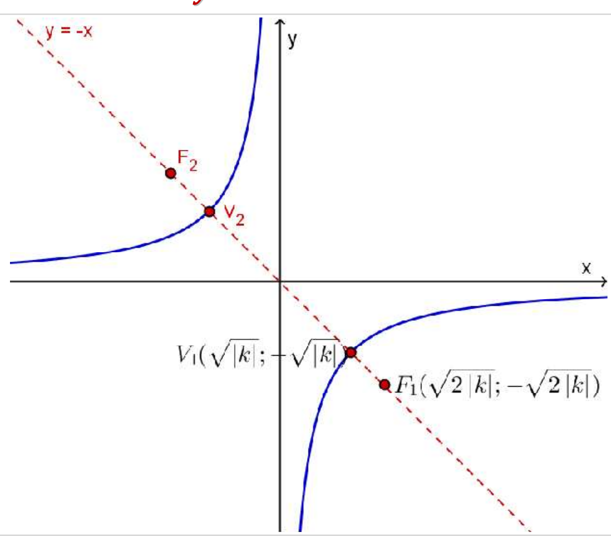
Iperbole equilatera riferita al centro e agli assi

L’iperbole equilatera riferita al centro e agli assi è un’iperbole a centro avente gli assi trasverso e non trasverso congruenti ($a = b$) .

Iperbole equilatera riferita al centro e agli assi con $F_1, F_2 \in asse\ x$	Iperbole equilatera riferita al centro e agli assi con $F_1, F_2 \in asse\ y$
$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$	$\boldsymbol{x^2 - y^2 = -a^2}$
	
I **vertici** sono: $V_1\ (a\ ;\ 0)$ $\quad V_2\ (-a\ ;\ 0)$	I **vertici** sono: $V_3\ (0\ ;\ \mathrm{a})$ $\quad V_4\ (0\ ;\ -a)$
I **fuochi** sono: $F_1\ (\ a\sqrt{2}\ ;\ 0)$ $\quad F_2\ (-a\sqrt{2}\ ;\ 0)$	I **fuochi** sono: $F_3\ (\ 0\ ;\ a\sqrt{2})$ $\quad F_4\ (\ 0\ ;\ -a\sqrt{2})$
Gli **asintoti** hanno equazioni: $y = \pm\, x$	Gli **asintoti** hanno equazioni: $y = \pm\, x$
La **semidistanza focale** è $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\,\sqrt{2}$	
*L’**eccentricità*** è $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{a\,\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$	

Iperbole equilatera riferita agli asintoti

L’iperbole equilatera riferita agli asintoti è un’iperbole a centro avente gli asintoti coincidenti con gli assi cartesiani.

$\boldsymbol{x \cdot y = k}$ con $k > 0$	$\boldsymbol{x \cdot y = k}$ con $k < 0$
	
Vertici $V_1\ (\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k})$ $\quad V_2\ (-\sqrt{k}\ ;\ -\sqrt{k})$	**Vertici** $V_1\ \left(\sqrt{\lvert k\rvert}\ ;\ -\sqrt{\lvert k\rvert}\right)$ $\quad V_2\ \left(-\sqrt{\lvert k\rvert}\ ;\ \sqrt{\lvert k\rvert}\right)$
Fuochi $F_1\ (\sqrt{2k}\ ;\ \sqrt{2k})$ $\quad F_2\ (-\sqrt{2k}\ ;\ -\sqrt{2k})$	**Fuochi** $F_1\left(\sqrt{2\lvert k\rvert}\ ;-\sqrt{2\lvert k\rvert}\right)$ $\quad F_2\left(-\sqrt{2\lvert k\rvert}\ ;\ \sqrt{2\lvert k\rvert}\right)$
Asintoti $x = 0$ e $y = 0$ $\qquad$ **Eccentricità** $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k}} = \sqrt{2}$	

Dimostrazione

Effettuiamo una rotazione di 45° in senso antiorario dell'iperbole equilatera riferita agli assi con i fuochi sull'asse x (ramo verde).

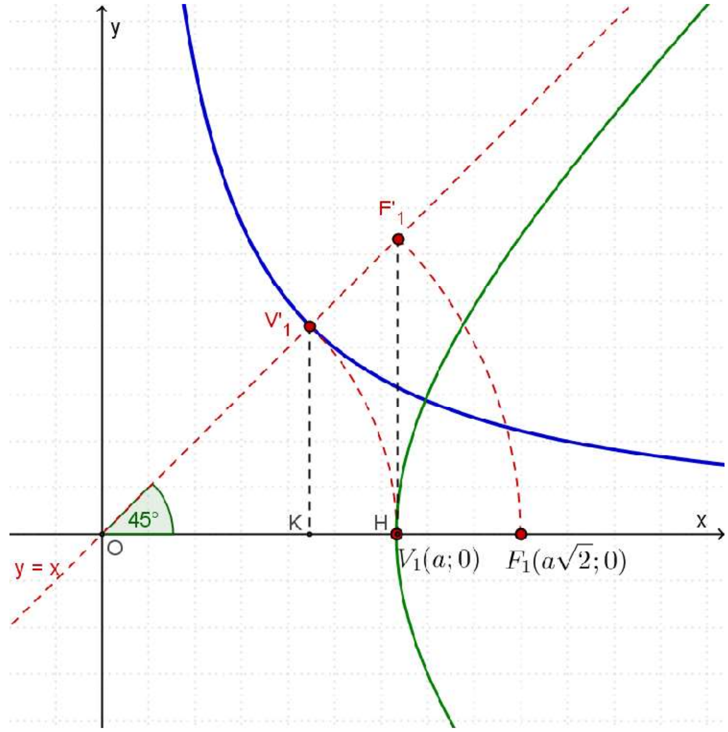
Per effetto della rotazione il vertice $V_1(a;0)$ *viene portato nel punto* $V_1{}'$ *tale che* $OV'_1 = a$.

OV'_1 *rappresenta la diagonale del quadrato di lato* OK.

Pertanto:

$$\overline{OK} = \overline{V'K} = \frac{\overline{OV_1'}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Quindi: $V_1' = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} ; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ *e* $V_2' = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} ; -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$



Per effetto della rotazione il vertice $F_1(a\sqrt{2};0)$ *viene portato nel punto* $V_1{}'$ *tale che* $OF'_1 = a\sqrt{2}$.

OF'_1 *rappresenta la diagonale del quadrato di lato* OH.

Pertanto:

$$\overline{OH} = \overline{F'H} = \frac{\overline{OF_1'}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$$

Quindi: $F_1' = (a\,;a)$ *e* $F_2' = (-a\,;-a)$

Applicando la definizione di iperbole

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\right| = 2a\,;$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} = \mp 2a\,;$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} = \mp 2a + \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\,;$$

$$x^2+a^2-2ax+y^2+a^2-2ay = 4a^2+x^2+a^2+2ax+y^2+a^2+2ay \mp 4a\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\ ;$$

$$-4ax-4ay-4a^2 = \mp 4a\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\ ;$$

$$-ax-ay-a^2 = \mp a\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\ ;$$

$$a^2x^2+a^2y^2+a^4+2a^2xy+2a^3x+2a^3y = a^2(x^2+a^2+2ax+y^2+a^2+2ay)$$

$$a^2x^2+a^2y^2+a^4+2a^2xy+2a^3x+2a^3y = a^2x^2+a^4+2a^3x+a^2y^2+a^4+2a^3y$$

$$2a^2xy = +a^4 \qquad xy = \frac{a^4}{2a^2} \qquad xy = \frac{a^2}{2}\ .$$

Ponendo $\frac{a^2}{2} = k$ *si ottiene l'equazione* $xy = k$ *con* $k > 0$.

Dalla posizione $\frac{a^2}{2} = k$ *si ottiene:* $a = \sqrt{2k}$

$\Rightarrow$ $F_1' = \left(\sqrt{2k}\,;\sqrt{2k}\right)$ *e* $F_2' = \left(-\sqrt{2k}\,;-\sqrt{2k}\right)$

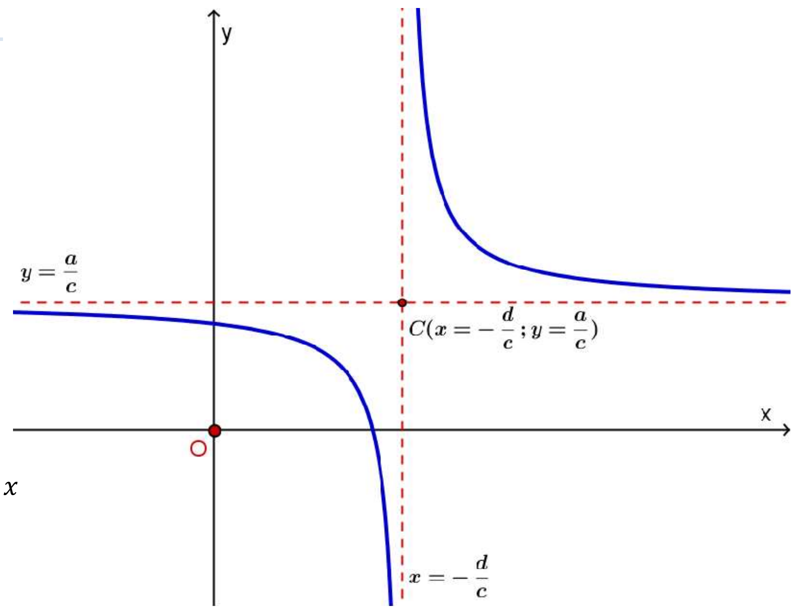
$\Rightarrow$ $V_1' = \left(\sqrt{k}\,;\sqrt{k}\right)$ *e* $V_2' = \left(-\sqrt{k}\,;-\sqrt{k}\right)$

Effettuando una rotazione di 45° in senso orario dell'iperbole equilatera riferita agli assi con i fuochi sull'asse x *si ottiene invece l'altra equazione* $x \cdot y = k$ *con* $k < 0$.

Funzione omografica

La funzione omografica è un'iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani.
La sua equazione è:

$$\boldsymbol{y=\frac{ax+}{cx+d}} \qquad con\ \ c \neq 0 \ \ \wedge \ \ ad-bc \neq 0$$



Se $c = 0$ il grafico è una retta.
Infatti l'equazione diventa $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$

Se $ad-bc=0$ il grafico è una retta parallela all'asse x, privata del punto $\left(-\frac{d}{c}\ ;\ \frac{a}{c}\right)$.

Infatti se $ad-bc=0\,;\ \Rightarrow\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}\ \ \Rightarrow$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{b}{a}\right)}=\frac{a}{c} \qquad \left(x\neq -\frac{d}{c}\right)$$

$y=\frac{a}{c}$ $\ \ con\ \ x \neq -\frac{d}{c}$ è una retta parallela all'asse x privato del punto $x=-\frac{d}{c}$.

Dimostrazione

Dimostriamo che, se $c\neq 0\ \wedge\ ad-bc\neq 0$ l'equazione $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ rappresenta un'iperbole equilatera traslata.
Effettuiamo pertanto la traslazione che porta il centro di simmetria C della funzione omografica nell'origine.

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x+\frac{d}{c} \\ y' = y-\frac{a}{c}\end{cases}$ *utilizzando le equazioni inverse* $\begin{cases} x = x'-\frac{d}{c} \\ y = y'+\frac{a}{c}\end{cases}$

si ottiene: $y'+\frac{a}{c}=\frac{a\left(x'+\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x'+\frac{d}{c}\right)+d}$ *Eliminando gli apici ininfluenti si ha:*

$y+\frac{a}{c}=\frac{a\left(x-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(x-\frac{d}{c}\right)+d}$; $\qquad y+\frac{a}{c}=\frac{ax-\frac{ad}{c}+b}{cx-d+}$; $\qquad y+\frac{a}{c}=\frac{ax}{cx}+\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx}$;

$y=\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx}$; $\qquad xy=\frac{\frac{-ad+bc}{c}}{c}$; $\qquad xy=\frac{-ad+bc}{c^2}$

Ponendo $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ *si ottiene la forma* $xy=k$

	$k>0$	$k<0$
Vertici	$V_1\left(\sqrt{k}-\frac{d}{c}\ ;\ \sqrt{k}+\frac{a}{c}\right)$ $V_2\left(-\sqrt{k}-\frac{d}{c};\ -\sqrt{k}+\frac{a}{c}\right)$	$V_1\left(\sqrt{\lvert k\rvert}-\frac{d}{c}\ ;\ -\sqrt{\lvert k\rvert}+\frac{a}{c}\right)$ $V_2\left(-\sqrt{\lvert k\rvert}-\frac{d}{c};\ \sqrt{\lvert k\rvert}+\frac{a}{c}\right)$
Fuochi	$F_1\left(\sqrt{2k}-\frac{d}{c};\sqrt{2k}+\frac{a}{c}\right)$ $F_2\left(-\sqrt{2k}-\frac{d}{c};-\sqrt{2k}+\frac{a}{c}\right)$	$F_1\left(\sqrt{2\lvert k\rvert}-\frac{d}{c};-\sqrt{2\lvert k\rvert}+\frac{a}{c}\right)$ $F_2\left(-\sqrt{2\lvert k\rvert}-\frac{d}{c};\sqrt{2\lvert k\rvert}+\frac{a}{c}\right)$
Centro di simmetria $O'\left(-\frac{d}{c}\ ;\ \frac{a}{c}\right)$	**Asintoti** $y=\frac{a}{c}\ \ \wedge\ \ x=-\frac{d}{c}$	

Nota

Pur essendo l'equazione della funzione omografica $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ costituita da quattro parametri: a, b, c, d, per determinare la sua equazione occorrono soltanto tre parametri indipendenti.
Infatti, essendo l'equazione definita per $c\neq 0$ è possibile dividere numeratore e denominatore per $c\neq 0$.

$y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{\frac{c}{c}x+\frac{d}{c}}$; $\qquad y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$; $\qquad$ ponendo: $\begin{cases}\frac{a}{c}=h\\ \frac{b}{c}=k\\ \frac{d}{c}=m\end{cases}$ $\qquad$ si ottiene la forma: $\boldsymbol{y=\frac{h\,x+k}{x+m}}$

Esempio 1

Determina l'equazione della funzione omografica passante per il punto $A\,(-7\,,1)$ e avente per asintoti le rette di equazioni: $y = 2$ e $x = -3$.

Soluzione

La funzione omografica ha la seguente equazione in forma ridotta : $y = \dfrac{h\,x + k}{x + m}$

Utilizziamo la conoscenza delle equazioni dei due asintoti $x + 3 = 0$ *e* $y = 2$ *e il passaggio per il punto* $\mathrm{A}\,(-7\,,1)$ *per impostare il seguente sistema:*

$$\begin{cases} m = 3 \\ h = 2 \\ 1 = \dfrac{h\cdot(-7) + k}{(-7) + m} \end{cases} \qquad \begin{cases} ---\\ ---\\ 1 = \dfrac{-7h + k}{-7 + m} \end{cases} \qquad \begin{cases} ---\\ ---\\ 1 = \dfrac{-7\cdot 2 + k}{-7 + 3} \end{cases} \qquad \begin{cases} ---\\ ---\\ 1 = \dfrac{-14 + k}{-4} \end{cases} \qquad \begin{cases} ---\\ ---\\ -4 = -14 + k \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 3 \\ h = 2 \\ k = 10 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della funzione omografica richiesta è : $y = \dfrac{2\,x + 10}{x + 3}$.