FASCIO DI CIRCONFERENZE

TEORIA

Date due circonferenze:

γ_1 di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$

γ_2 di equazione $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

si dice **fascio di circonferenze** generato da γ_1 e γ_2 l'insieme costituito dalla circonferenza γ_2 e da tutte le circonferenze che si ottengono dall'equazione:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c+\ k\cdot(\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'\ )\ =0} \qquad \text{al variare di } k\in R\ .$$

Le due circonferenze γ_1 e γ_2 sono dette **circonferenze generatrici** del fascio.

Per $k=0$ si ottiene la circonferenza γ_1 $\quad x^2+y^2+ax+by+c=0$

Mentre per nessun valore di k si può ottenere la circonferenza γ_2 $\quad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

Tuttavia se dividiamo tutti i termini per k si ha:

$$\frac{1}{k}\cdot\left(x^2+y^2+ax+by+c\right)+x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

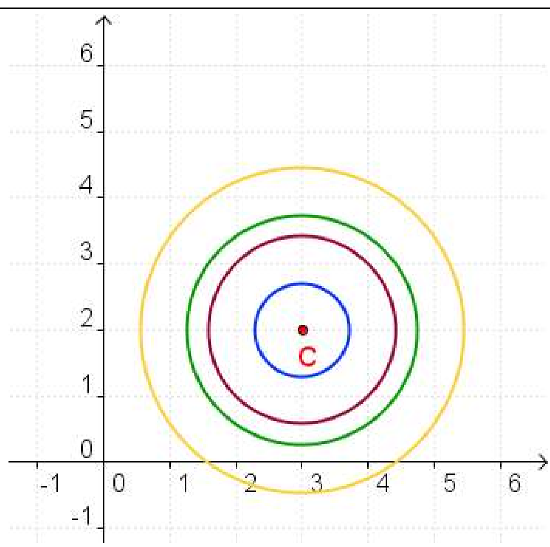
e se a k assegniamo valori sempre più grandi, cioè:

se $k\longrightarrow\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{k}\longrightarrow 0$ e si ottiene la circonferenza γ_2: $\quad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$.

Lo studio del fascio di circonferenze si basa sulla ricerca delle circonferenze generatrici e dei **punti base del fascio**.

Per determinare i punti base occorre risolvere il sistema formato dalle due circonferenze generatrici.

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

<table>
<tr><td colspan="2">Se $a=a' \quad\wedge\quad b=b'$
le circonferenze generatrici sono concentriche.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Il sistema è impossibile.
Il fascio non ha punti base.</td></tr>
</table>

Se $\boldsymbol{a \neq a'} \quad \vee \quad \boldsymbol{b \neq b'}$

le circonferenze generatrici non sono concentriche.

Sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione:

$$\boldsymbol{(a - a')\ x\ + (b - b')\ y\ + (c - c') = 0}$$

che rappresenta una retta, detta **asse radicale** del fascio.

Tale retta può essere considerata una circonferenza degenere di raggio infinitivamente grande.

Inserendo nel sistema questa equazione al posto dell'equazione della circonferenza γ_2, il sistema da quarto grado diventa di II grado.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b') + (c - c') = 0 \end{cases}$$

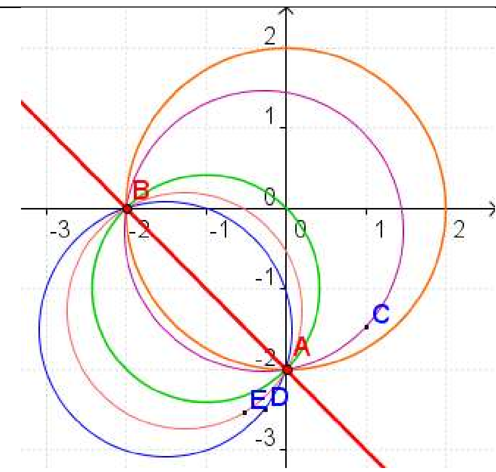
Se il sistema ha due soluzioni reali e distinte: i punti A e B.

Il fascio ha due punti base: A e B.

Tutte le circonferenze del fascio sono secanti nei due punti base A e B.

Il fascio contiene una circonferenza degenere:

- L'asse radicale (retta passante per i punti A e B)



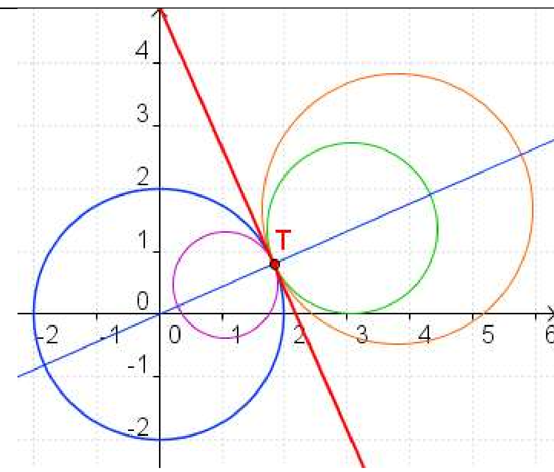
Se il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti: il punto T

Il fascio ha un solo punto base: T.

Tutte le circonferenze del fascio sono tangenti nel punto T all'asse radicale .

Il fascio contiene due circonferenze degeneri:

- l'asse radicale
- la circonferenza di centro T e raggio nullo.



Se il sistema non ha soluzioni reali

Il fascio non ha punti base.

Due qualsiasi circonferenze del fascio non hanno punti in comune.

Il fascio contiene una circonferenza degenere:

- L'asse radicale (retta passante per i punti A e B e che non interseca alcuna circonferenza del fascio) .