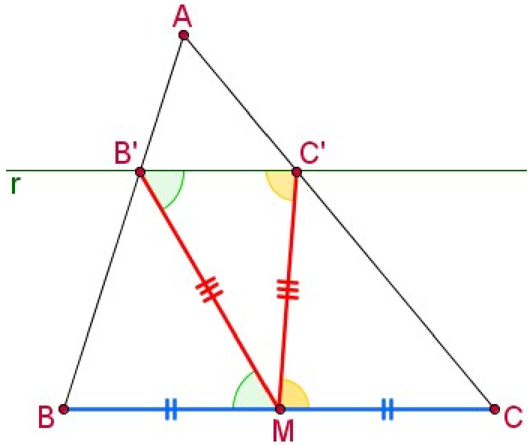
Quesito 1

Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC, in modo tale che $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC.

IPOTESI		TESI
$BM = CM$ $AB' = \frac{1}{3}AB$ $AC' = \frac{1}{3}AC$ $MB' = MC'$	$\Rightarrow$	$AB = AC$

<u>*Soluzione*</u>
Ricordiamo, (https://www.mimmocorrado.it/mat/geometria/8.similitudine/Similitudine.pdf - pag. 8), una conseguenza del Teorema di Talete:

Teorema - Retta parallela ad un lato del triangolo
Se una retta interseca due lati di un triangolo in segmenti proporzionali sui due lati, allora la retta è parallela al terzo lato.



Nel nostro caso:

$$AB' = \frac{1}{3}AB \quad \Leftrightarrow \quad BB' = \frac{2}{3}AB \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB'}{BB'} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AC' = \frac{1}{3}AC \quad \Leftrightarrow \quad CC' = \frac{2}{3}AC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC'}{CC'} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \; .$$

Pertanto il segmento $B'C'$ è parallelo al lato BC.

Il triangolo $B'C'M$ è isoscele sulla base $B'C'$, perché per ipotesi $B' = MC'$.

Pertanto gli angoli alla base $M\widehat{B'}C' = M\widehat{C'}B'$.

$B\widehat{M}B' = M\widehat{B'}C'$ perché angoli alterni interni fra le rette parallele BC e $B'C'$ tagliate dalla trasversale $B'M$.

$C\widehat{M}C' = M\widehat{C'}B'$ perché angoli alterni interni fra le rette parallele BC e $B'C'$ tagliate dalla trasversale $C'M$.

Si ottiene: $B\widehat{M}B' = M\widehat{B'}C' = M\widehat{C'}B' = C\widehat{M}C'$

Per la proprietà transitiva si ha che gli angoli: $B\widehat{M}B' = C\widehat{M}C'$.

I due triangoli BMB' e CMC' sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei tringoli. Infatti hanno:

$BM = CM$ perché M è il punto medio di BC;

$MB' = MC'$ per ipotesi;

$B\widehat{M}B' = C\widehat{M}C'$ per quanto dimostrato precedentemente.

Avendo dimostrato che i due triangoli BMB' e CMC' sono congruenti, hanno gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ congruenti.

Si conclude che il triangolo ABC è isoscele sulla base BC.

Si ha quindi la tesi, cioè: $\boldsymbol{AB = AC}$.

Quesito 2

Si considerino la superficie sferica di equazione $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1$ e il piano π di equazione $x-2y-2z+d=0$. Discutere, al variare del parametro reale d, se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.

Soluzione

Il centro della superficie sferica è: $C\,(1\,;2\,;0)$.

Il raggio della superficie sferica è: $r=\sqrt{1}=1$.

$Posto\ la\ \ misura\ del\ raggio\ della\ superficie\ sferica = r$

$e\ \ la\ \ distanza\ del\ piano\ \pi\ dal\ centro\ della\ superficie\ sferica = \delta$

si ha che: $\begin{cases} se\ \ \delta < r & \pi\ \text{è}\ secante \\ se\ \ \delta = r & \pi\ \text{è}\ tangente \\ se\ \ \delta > r & \pi\ \text{è}\ esterno \end{cases}$

$Calcoliamo\ pertanto\ la\ distanza\ \delta\ del\ piano\ \pi\ dal\ centro\ della\ sfera:$

$$\delta = \frac{|ax_C+by_C+cz_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\cdot 1-2\cdot 2-2\cdot 0+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{|1-4-0+d|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|d-3|}{3}.$$

Pertanto: $\begin{cases} se\ \ \frac{|d-3|}{3} < 1 & \pi\ \text{è}\ secante \\ se\ \ \frac{|d-3|}{3} = 1 & \pi\ \text{è}\ tangente \\ se\ \ \frac{|d-3|}{3} > 1 & \pi\ \text{è}\ esterno \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{se}\ \ \mathbf{0} < d < 6 & \pi\ \text{è}\ secante \\ \boldsymbol{se}\ \ \boldsymbol{d} = \mathbf{0}\ \vee\ \boldsymbol{d} = \mathbf{6} & \boldsymbol{\pi}\ \text{è}\ \boldsymbol{tangente} \\ \boldsymbol{se}\ \ \boldsymbol{d} < 0\ \vee\ \boldsymbol{d} > 6 & \boldsymbol{\pi}\ \text{è}\ \boldsymbol{esterno} \end{cases}$

Calcoli:

$\frac{|d-3|}{3}=1\,; \qquad |d-3|=3\,; \qquad \begin{matrix} d-3=-3 & d=0 \\ d-3=+3 & d=6 \end{matrix}$

$\frac{|d-3|}{3}<1\,; \qquad |d-3|<3\,; \qquad -3<d-3<3\,; \qquad -3+3<d<3+3\,; \qquad 0<d<6\,;$

$\frac{|d-3|}{3}>1\,; \qquad |d-3|>3\,; \qquad d-3<-3\ \vee\ d-3>+3 \qquad d<0\ \vee\ d>6\,.$

Il piano π divide la sfera in due parti uguali quando la sua distanza dal centro è nulla. Cioè quando il centro della sfera appartiene al piano.

Imponiamo quindi la condizione di appartenenza del centro C al piano π :

$1-2\cdot 2-2\cdot 0+d=0\,; \qquad 1-4+d=0\,; \qquad \boldsymbol{d=3}\,.$

Quesito 3

L'opera futurista di Boccioni "*Forme uniche della continuità nello spazio*" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \le x \le 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f, dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1; 2]$.

Soluzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x & se \;\; -1 \le x \le 0 \\ 1 + tan\left(x + \dfrac{3}{4}\pi\right) & se \;\; 0 < x \le 2 \end{cases}$$

La funzione $g(x) = -4x^2 - 8x$ *, trattandosi di una funzione polinomiale è continua e derivabile in* $[-1\,,0]$.

La funzione $h(x) = 1 + tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ *, ha per dominio* $\left]0 + \frac{3}{4}\pi\,, 2 + \frac{3}{4}\pi\right]$

Tale intervallo $\left]0 + \frac{3}{4}\pi\,, 2 + \frac{3}{4}\pi\right]$ *è contenuto in* $\left(\frac{\pi}{2}\,, \frac{3}{2}\pi\right)$ *dove la funzione tangente è continua e derivabile.*

Resta da esaminare il punto di congiunzione delle due funzioni, e cioè $x = 0$.

Affinché la funzione $f(x)$ *sia continua in* $x = 0$ *occorre che:*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$\lim_{x \to 0^-} (-4x^2 - 8x) = -4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 = \mathbf{0}$	$\lim_{x \to 0^+} \left[1 + tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right] = 1 + (-1) = \mathbf{0}$

Pertanto la funzione è continua in $x = 0$.

Affinché la funzione sia derivabile in $x = 0$ *occorre che:* $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} -8x - 8 & se \;\; -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{cos^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)} & se \;\; 0 < x \le 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-8x - 8) = \mathbf{-8}$	$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{cos^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)} = \dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \mathbf{2}$

Pertanto la funzione non è derivabile in $x = 0$. *In tale punto* $f(x)$ *presenta un punto angoloso.*

Il grafico della funzione $f(x)$ *è dato dall'unione dei grafici delle funzioni* (x) *e* $h(x)$.

$g(x) = -4x^2 - 8x$ *è un ramo di una parabola con vertice in* $V(-1; 4)$ *e concavità negativa.*

Calcoli: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\cdot(-4)} = -1$; $\quad y_V = f(x_V) = -4 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) = -4 + 8 = 4$.

$h(x) = 1 + tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ *è una funzione strettamente crescente per* $0 < x \le 2$.

Infatti $f'(x) = \frac{1}{cos^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)} > 0$ *è sempre positiva perché è data dal rapporto di due quantità sempre positive.*

Per una maggiore accuratezza del grafico consideriamo la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{\left[cos^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\right]^2}\cdot 2\cdot cos\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\cdot\left(-\,sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 2\frac{sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)}{cos^3\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)}\,.$$

Discutiamo i segni del numeratore e del denominatore nell'intervallo $]0,2]$:

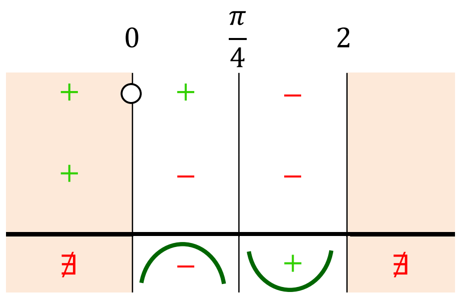
$sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) > 0\,;\quad 0 < x+\frac{3}{4}\pi < \pi\,;\quad -\frac{3}{4}\pi < x < \pi-\frac{3}{4}\pi\,;\quad -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}.$

$cos^3\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) > 0\,;\quad cos\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) > 0\,;\quad -\frac{\pi}{2} < x+\frac{3}{4}\pi < \frac{\pi}{2}\,;\quad -\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\pi\,;$

$-\frac{5}{4}\pi < x < -\frac{\pi}{4}$

Studiamo i segni dei due fattori:

$sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) > 0$	$-\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}$
$cos^3\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) > 0$	$-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{\pi}{4}$



Si conclude che:

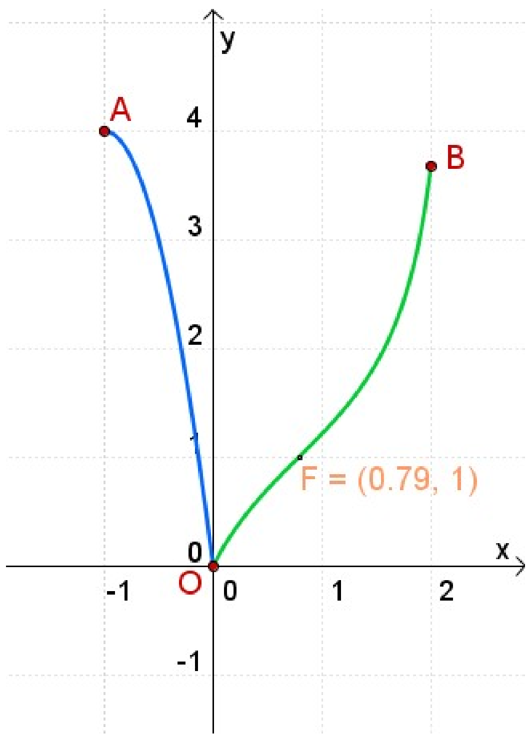
$f''(x) > 0 \quad per\ \frac{\pi}{4} < x < 2$

$f''(x) < 0 \quad per\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$

$f(x)$ *è convessa in* $\left[\frac{\pi}{4}\,,2\right]$ $\qquad$ $f(x)$ *è concava in* $\left]0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.

La derivata seconda cambia segno in $x = \frac{\pi}{4}$.

La funzione ha in $x = \frac{\pi}{4}$ *un punto di flesso.*



Quesito 4

Assegnata una funzione g , derivabile in R e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determinare l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x)\, sin^2 x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

Soluzione

Chiamiamo $h(x) = g(x)\, sin^2 x$.

L'equazione della retta tangente alla curva $h(x) = g(x)\, sin^2 x$ *nel suo punto di ascissa* $\frac{\pi}{4}$ *è del tipo:*

$$y - h\left(\frac{\pi}{4}\right) = h'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

L'equazione della retta normale alla curva $h(x) = g(x)\, sin^2 x$ *nel suo punto di ascissa* $\frac{\pi}{4}$ *è del tipo:*

$$y - h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Calcoliamo $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \; = \; g\left(\frac{\pi}{4}\right) sin^2 \frac{\pi}{4} \; = \; 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \; = \; 2 \cdot \frac{1}{2} \; = \; 1$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$h'(x) \; = \; g'(x) \cdot sin^2 x + \; g(x) \cdot 2 \cdot sin\, x \cdot cos\, x \; = \; g'(x) \cdot sin^2 x + \; 2 \cdot g(x) \cdot sin\, x \cdot cos\, x \, .$$

Calcoliamo:

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) \; = \; g'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot sin^2 \frac{\pi}{4} + \; 2 \cdot g\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot sin \frac{\pi}{4} \cdot cos \frac{\pi}{4} \; = \; 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \; 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \; = \; 1 + \; 2 \; = \; 3\, .$$

Sostituiamo nella formula dell'equazione della retta normale alla curva:

$$y - h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \; ;$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \; ;$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3} x + \frac{\pi}{12} \; ;$$

$$y = -\frac{1}{3} x + \frac{\pi}{12} + 1 \; ;$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3} x + \frac{\pi + 12}{12}} \, .$$

Quesito 5

Determinare il valore del parametro reale k in modo che le due curve $y = e^x$, $y = 6 - k\,e^{-x}$ risultino tangenti tra loro, individuando le coordinate del punto di contatto.

Soluzione

Chiamiamo le due funzioni: $f(x) = e^x$ *e* $g(x) = 6 - k\,e^{-x}$.

Le due curve $y = e^x$, $y = 6 - k\,e^{-x}$ *risultano tangenti in un punto comune* x *se sono soddisfatte le due condizioni:*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Calcoliamo $f'(x) = e^x$

Calcoliamo $g'(x) = 0 - k(-e^{-x}) = ke^{-x}$.

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} e^x = 6 - k\,e^{-x} \\ e^x = ke^{-x} \end{cases}$$

Nella seconda equazione: $e^x = ke^{-x}$. *Sostituiamo tale espressione nella prima equazione:*

$$\begin{cases} ke^{-x} = 6 - k\,e^{-x} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} ke^{-x} + k\,e^{-x} = 6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2ke^{-x} = 6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} ke^{-x} = 3 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} e^{-x} = \dfrac{3}{k} \\ - \end{cases}$$

Dalla definizione di logaritmo:

$$\begin{cases} -x = ln\dfrac{3}{k} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\,ln\dfrac{3}{k} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = ln\left(\dfrac{3}{k}\right)^{-1} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = ln\dfrac{k}{3} \\ - \end{cases}$$

Sostituiamo tale valore nella seconda equazione:

$$\begin{cases} - \\ e^{ln\frac{k}{3}} = k \cdot \dfrac{3}{k} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \dfrac{k}{3} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \boldsymbol{k = 9} \end{cases} \quad \begin{cases} x = ln\dfrac{9}{3} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = ln\,3} \\ - \end{cases}$$

Le due curve risultano tangenti tra loro per $\boldsymbol{k = 9}$.

Calcoliamo l'ordinata del punto di ascissa $x = ln\,3$:

$f(x) = e^x = e^{ln\,3} = 3$.

Pertanto le coordinate del punto di contatto sono: $\boldsymbol{P(ln\,3\ ;3)}$.

Quesito 6

Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x)\, dx = 9$.

Soluzione

La funzione $f(x)$ da determinare deve soddisfare le 3 seguenti condizioni:

$f'(0) = 2$	*Deduzione:* *La retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $x = 0$ ha equazione:* $y - f(0) = m \cdot (x - 0)$ *Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 è $m = f'(0)$.* *Si ottiene:* $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ *cioè:* $y = f'(0) \cdot x + f(0)$ *Nel nostro caso tale retta tangente ha equazione:* $y = 2x + 3$. *Confrontando:* $y = f'(0) \cdot x + f(0)$ *e* $y = 2x + 3$ *si ricava:* $f'(0) = 2$.
$f(0) = 3$	*Deduzione:* *Abbiamo prima visto che l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 è :* $y = f'(0) \cdot x + f(0)$ *Confrontando:* $y = f'(0) \cdot x + f(0)$ *e* $y = 2x + 3$ *si ricava:* $f(0) = 3$
$\int_0^3 f(x)\, dx = 9$	*Dall'enunciato del quesito.*

Una funzione polinomiale che deve soddisfare le 3 suddette condizioni è del tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f'(x) = 2ax + b$

$$\int_0^3 (ax^2 + bx + c)\, dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^3 = \left[\left(a\frac{3^3}{3} + b\frac{3^2}{2} + c \cdot 3\right) - \left(a\frac{0^3}{3} + b\frac{0^2}{2} + c \cdot 0\right)\right] = 9a + \frac{9}{2}b + 3c$$

Dai dati esposti otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 3 \\ \int_0^3 f(x)\, dx = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 2a \cdot 0 + b \\ 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ 9a + \frac{9}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = +2 \\ c = +3 \end{cases}$$

La funzione polinomiale $f(x)$ richiesta ha equazione: $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$.

Quesito 7

Siccome mi sembrava che per puro caso alcuni fatti fossero avvenuti così com'erano stati predetti dagl'indovini, tu hai parlato a lungo del caso, e hai detto, per esempio, che si può ottenere il "colpo di Venere" lanciando a caso quattro dadi […].

Cicerone, De divinatione, II, 21, 48 - traduzione e cura di S. Timpanaro, Garzanti, Milano 1999.

Testto originale - ***Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis […].***

Cicerone, nel dialogo con il fratello Quinto, parla del colpo di Venere, che consiste nel lanciare 4 dadi a 4 facce ottenendo 4 risultati diversi. Supponendo che le facce di ciascun dado siano equiprobabili, determinare:

- **la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi;**
- **la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.**

Soluzione a

Calcola la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi.

I casi possibili sono: $4^4 = 256$.

I casi favorevoli sono 24.

Infatti:

il 1° numero si può presentare in 4 modi diversi.

il 2° numero si può presentare in 3 modi diversi (perché il numero che è uscito al 1°lancio non si può più presentare).

il 3° numero si può presentare in 2 modi diversi (perché i numeri che sono usciti al 1°e al 2° non si possono più presentare).

il 4° numero si può presentare in 1 solo modo (il numero che non è uscito nei primi 3 lanci).

Pertanto la probabilità richiesta è:

$$p\ (colpo\ di\ Venere) = \frac{24}{256} = \mathbf{\frac{3}{32}}\ .$$

Soluzione b

Calcola la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.

I casi possibili sono: $4^4 = 256$.

I casi favorevoli sono 4, e cioè:

1,1,1,1

2,2,2,2

3,3,3,3

4,4,4,4.

Pertanto la probabilità richiesta è:

$$p\ (4\ n°\ uguali) = \frac{4}{256} = \mathbf{\frac{1}{64}}\ .$$

Quesito 8

Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "STUDIARE"? In quanti di tali anagrammi si può leggere consecutivamente la parola "ARTE", come ad esempio in "SUARTEDI"?
Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "VACANZA"?

Soluzione a

La parola "STUDIARE" ha 8 lettere tutte diverse.

Gli anagrammi sono: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; \mathbf{40320}$.

Infatti:

la 1^A lettera si può presentare in 8 modi diversi.

la 2^A lettera si può presentare in 7 modi diversi (perché la lettera considerata prima occorre escluderla).

la 3^A lettera si può presentare in 6 modi diversi (perché le lettere considerate prima occorre escluderle).

la 4^A lettera si può presentare in 5 modi diversi (perché le lettere considerate prima occorre escluderle).

la 5^A lettera si può presentare in 4 modi diversi (perché le lettere considerate prima occorre escluderle).

la 6^A lettera si può presentare in 3 modi diversi (perché le lettere considerate prima occorre escluderle).

la 7^A lettera si può presentare in 2 modi diversi (perché le lettere considerate prima occorre escluderle).

la 8^A lettera si può presentare in 1 solo modo (perché le lettere considerate prima occorre escluderle).

Soluzione b

Consideriamo la parola "ARTE" come un blocco inscindibile (come se fosse una sola lettera).

Pertanto occorre calcolare gli anagrammi di 5 "lettere" dove le lettere che consideriamo sono quelle non utilizzate dalla parola "ARTE" (s, u, d, i) più la parola "ARTE" considerata come una singola lettera.

Pertanto gli anagrammi in cui si può leggere consecutivamente la parola "ARTE"sono:

$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$.

Soluzione c

VACANZA ha 7 lettere, di cui una, la lettera "A" ripetuta 3 volte.

Se le lettere fossero tutte diverse, gli anagrammi sarebbero: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Ma quando si scambiano di posto le lettere "A", non si ottiene un nuovo anagramma (la parola resta uguale).

Questi scambi della lettera "A" che non danno origine ad un nuovo anagramma sono: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *:*

$A_1A_2A_3$

$A_1A_3A_2$

$A_2A_1A_3$

$A_2A_3A_1$

$A_3A_1A_2$

$A_3A_2A_1$

Pertanto gli anagrammi della parola "VACANZA" sono:

$$N = \frac{5040}{6} = \mathbf{840}.$$