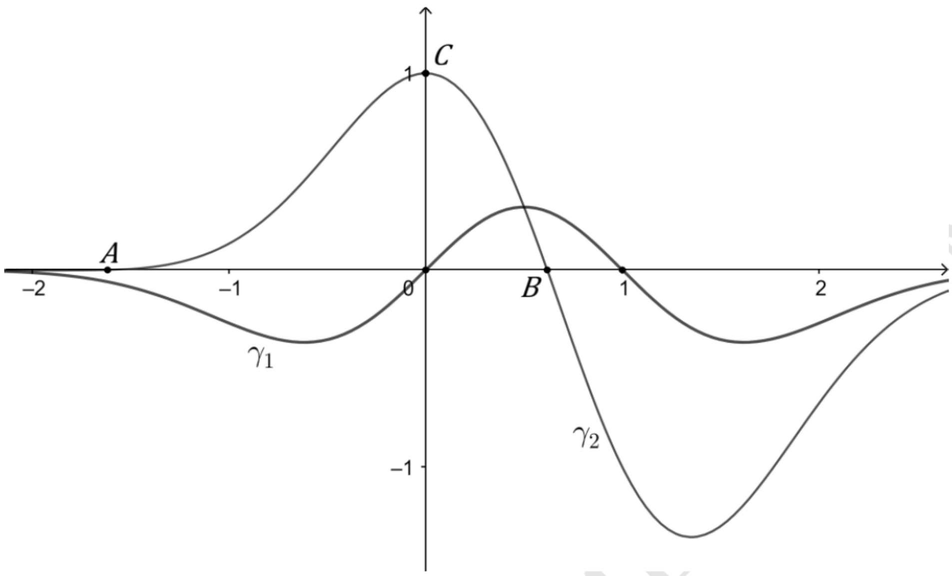
Problema 2

«La bellezza è mescolare, in giuste proporzioni, il finito e l'infinito» - attribuita a Platone



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g, definite su $\mathbb{R}$, le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}\,, \qquad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

a) Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A, è uno zero di g.

b) Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.

d) Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1, γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R.

Punto a

Utilizzando le informazioni deducibili dal grafico di $f(x)$ *determiniamo il polinomio* $p(x)=ax^2+bx+c$ *della funzione* $\boldsymbol{f(x)=p(x)\cdot e^{p(x)}}$		
Essendo $e^{p(x)}>0\ \ \forall x\in R$ $f(x)=0$ *quando* $p(x)=0$ $f(x)=0$ *per* $x=0\ \vee\ x=1$	$\Rightarrow$	$\begin{cases}0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c\\0=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c\end{cases}\quad \begin{cases}\boldsymbol{c=0}\\\boldsymbol{b=-a}\end{cases}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{p(x)}=ax^2-ax=\boldsymbol{a(x^2-x)}$
$f(x)>0$ *per* $0<x<1$	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{a}<0$
Calcoliamo la derivata prima per utilizzare la terza informazione: $\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}$ *è ascissa di un punto stazionario di* f	$\Rightarrow$	$\begin{aligned}f^I(x)&=p^I(x)\cdot e^{p(x)}+p(x)\cdot e^{p(x)}\cdot p^I(x)=\\&=p^I(x)\cdot e^{p(x)}\cdot[1+p(x)]=\\&=a(2x-1)\cdot e^{p(x)}\cdot[1+a(x^2-x)]\end{aligned}$
$f^I(x)=0$	$\Rightarrow$	$a(2x-1)\cdot e^{p(x)}\cdot[1+a(x^2-x)]=0\qquad \begin{matrix}2x-1=0 & x=1/2\\ e^{p(x)}=0 & mai\\ 1+a(x^2-x)=0 & x=\varphi\end{matrix}$
$f^I(x)=0$ *per* $x=\varphi$	$\Rightarrow$	$1+a(x^2-x)=0\qquad per\ \ x=\varphi=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$
Calcoli:		$1+a\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)=0\,;$ $1+a\left(\frac{1+5+2\sqrt5}{4}-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)=0\,;$ $1+a\left(\frac{3+\sqrt5}{2}-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)=0\,;$ $1+a\left[\frac{3+\sqrt5-(1+\sqrt5)}{2}\right]=0\,;$ $1+a\left[\frac{3-1}{2}\right]=0\,;\qquad 1+a=0\,;\qquad \boldsymbol{a=-1}\,.$
Pertanto $\boldsymbol{p(x)=-1\cdot(x^2-x)}$	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{f(x)=(x-x^2)\cdot e^{(x-x^2)}}$

Utilizzando le informazioni deducibili dal grafico di $g(x)$ *determiniamo il polinomio* $q(x) = lx^2 + mx + n$ *della funzione* $\boldsymbol{g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)} = (lx^2 + mx + n) \cdot e^{x-x^2}}$		
Calcoliamo la derivata prima di $g(x)$		$g^I(x) = (2lx + m) \cdot e^{x-x^2} + (lx^2 + mx + n) \cdot e^{x-x^2} \cdot (1-2x)$
γ_2 *passa per il punto* $C(0\,;1)$ $\Rightarrow$ $g(0) = 1$	$\Rightarrow$	$(l \cdot 0^2 + m \cdot 0 + n) \cdot e^{x-x^2} = 1$ $n \cdot e^{0} = 1\,;$ $\quad \boldsymbol{n = 1}$
Il punto $C(0\,;1)$ *è stazionario* $\Rightarrow$ $g^I(0) = 0$	$\Rightarrow$	$(2l \cdot 0 + m) \cdot e^{0-0^2} + (l \cdot 0^2 + m \cdot 0 + n) \cdot e^{0-0^2} \cdot (1 - 2 \cdot 0) = 0$ $m \cdot 1 + n \cdot 1 \cdot 1 = 0\,;$ $\quad \boldsymbol{m + n = 0}.$
$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g^I(0) = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} n = 1 \\ m + n = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \boldsymbol{n = +1} \\ \boldsymbol{m = -1} \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g(x) = (lx^2 - x + 1) \cdot e^{x-x^2}}$
Utilizziamo la terza informazione: $g(-\varphi) = 0$ *Essendo* $e^{x-x^2} \neq 0 \quad \forall x \in R$ $g(-\varphi) = 0$ *se* $q(-\varphi) = 0$	$\Rightarrow$	$q(x) = lx^2 - x + 1$ $l \cdot \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = 0\,;$
Calcoli:		$l \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = 0\,;$
		$l \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = 0\,;$
		$l \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0\,;$
		$l \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;$
		$l = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{3+\sqrt{5}}\,;$ $\quad \boldsymbol{l = -1}.$
Pertanto $\boldsymbol{q(x) = -x^2 - x + 1}$	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{g(x) = (-x^2 - x + 1) \cdot e^{(x-x^2)}}$

Punto b

Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Studiamo la funzione $\boldsymbol{f(x) = (x - x^2) \cdot e^{x-x^2}}$	
Dominio	$D = (-\infty, +\infty)$
Simmetrie	$f(x)$ *non è ne pari ne dispari* $f(-x) = (-x - (-x)^2) \cdot e^{-x-(-x)^2} = (-x - x^2) \cdot e^{-x-x^2} \neq \begin{cases} +f(x) \\ -f(x) \end{cases}$
Intersezione con gli assi	$(0;0)$, $(1;0)$
Segno	$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0\,,1)$ $f(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty\,,0) \cup (1\,,+\infty)$ $(x - x^2) \cdot e^{x-x^2} > 0\,;$ *Essendo* $e^{x-x^2} > 0 \quad \forall x \in R\,, \quad (x - x^2) \cdot e^{x-x^2} > 0$ *per* $x - x^2 > 0\,; \quad 0 < x < 1$
Comportamento agli estremi del dominio	$f(x)$ *ha l'asintoto orizzontale* $y = 0$. $\lim_{x\to-\infty} (x - x^2) \cdot e^{x-x^2} = (\infty \cdot 0 = ?)$ $= \lim_{x\to-\infty} \frac{x - x^2}{e^{x^2-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{e^{x^2}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} = ?\right) = 0$. *perché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore.* *Oppure utilizzando De L'Hospital:* $\lim_{x\to-\infty} \frac{x - x^2}{e^{x^2-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - 2x}{e^{x^2-x} \cdot (2x - 1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(2x - 1)}{e^{x^2-x} \cdot (2x - 1)} =$ $= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^{x^2-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^{x^2}} = \frac{-1}{+\infty} \quad 0^-$. $\lim_{x\to+\infty} (x - x^2) \cdot e^{x-x^2} = (\infty \cdot 0 = ?)$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^2}{e^{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{e^{x^2}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} = ?\right) = 0$. *perché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore.* *Oppure utilizzando De L'Hospital:* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^2}{e^{x^2-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 2x}{e^{x^2-x} \cdot (2x - 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(2x - 1)}{e^{x^2-x} \cdot (2x - 1)} =$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^{x^2}} = \frac{-1}{+\infty} \quad 0^-$. $f(x)$ *non ha asintoti verticali o obliqui.*
Derivata prima	$f(x) = (x - x^2) \cdot e^{x-x^2}$ $f^I(x) = (1 - 2x) \cdot e^{x-x^2} + (x - x^2) \cdot e^{x-x^2} \cdot (1 - 2x)$ $f^I(x) = (1 - 2x) \cdot e^{x-x^2}[1 + (x - x^2)]$ $f^I(x) = (1 - 2x) \cdot (-x^2 + x + 1) \cdot e^{x-x^2}$ $f^I(x) = (2x - 1) \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{x-x^2}$

Segno della derivata prima	$f^{I}(x) > 0 \;\; in \; \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \;\; \rightarrow \;\; f(x) \;\;$ *è crescente in* $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ $f^{I}(x) < 0 \;\; in \; \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \;\; \rightarrow \;\; f(x) \;\;$ *è decrescente in* $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$(2x-1)\cdot(x^2-x-1)\cdot e^{\,x-x^2} > 0\,;$

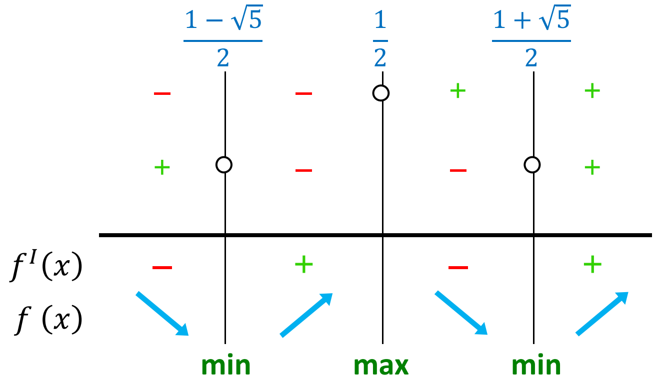
Essendo $e^{\,x-x^2} > 0 \;\; \forall x \in R$ *il segno è dato dal polinomio* $(2x-1)\cdot(x^2-x-1)$

$(2x-1)\cdot(x^2-x-1) > 0$

Studiamo i segni dei due fattori:

$$2x-1>0 \qquad\qquad x > \frac{1}{2}$$

$$x^2-x-1>0 \qquad\qquad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \;\; \vee \;\; x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Calcoli:

$x^2-x-1>0 \quad per \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \;\; \vee \;\; x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$x^2-x-1=0\,; \qquad \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 5 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Max e min	$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \;\; e \;\; \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *sono punti di minimo assoluto* $\qquad x = \frac{1}{2}$ *è un punto di massimo assoluto*
Insieme immagine	$Im\, f(x) = \left[-\frac{1}{e}, \frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right]$ $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\cdot e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} =$ $= \left(\frac{1+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}}{2}\right)} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}.$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{e}}{4}.$
Punti di non derivabilità	$f(x)$ *è derivabile in tutto il suo dominio perché prodotto di una funzione polinomiale per una funzione esponenziale.*
Derivata seconda	$f^{I}(x) = (2x-1)\cdot(x^2-x-1)\cdot e^{\,x-x^2}$ $f^{I}(x) = (2x^3-2x^2-2x-x^2+x+1)\cdot e^{\,x-x^2}$ $f^{I}(x) = (2x^3-3x^2-x+1)\cdot e^{\,x-x^2}$ $f^{II}(x) = (6x^2-6x-1)\cdot e^{\,x-x^2} + (2x^3-3x^2-x+1)\cdot e^{\,x-x^2}\cdot(1-2x)$ $f^{II}(x) = (6x^2-6x-1)\cdot e^{\,x-x^2} + (2x^3-3x^2-x+1-4x^4+6x^3+2x^2-2x)\cdot e^{\,x-x^2}$ $f^{II}(x) = (-4x^4+8x^3+5x^2-9x)\cdot e^{\,x-x^2}$ $f^{II}(x) = -x\cdot(4x^3-8x^2-5x+9)\cdot e^{\,x-x^2}$ $\boldsymbol{f^{II}(x) = -x\cdot(x-1)\cdot(4x^2-4x-9)\cdot e^{\,x-x^2}}$

Fattorizziamo: $4x^3 - 8x^2 - 5x + 9$.

I divisori di 3 sono: $D_3 = \{ \pm 1 ,\ \pm 3,\ \pm 9 \}$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$= \ (x-1) \cdot (4x^2 - 4x - 9) \ =$

	4	−8	−5	+9
1		+4	−4	−9
	4	−4	−9	0

$4x^2 - 4x - 9 = 0\,;$ $\quad \frac{\Delta}{4} = 4 + 36 = 40\,;$ $\quad x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{40}}{4} \ = \ \begin{array}{l} x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1-\sqrt{10}}{2} \\ x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1-\sqrt{10}}{2} \end{array}$

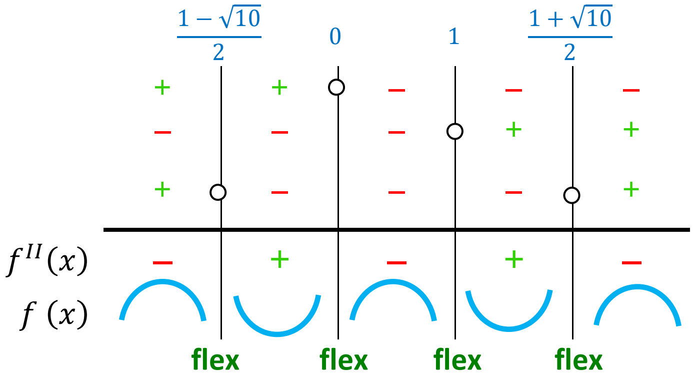
Segno della derivata seconda	$f^{II}(x) = \ -x \cdot (x-1) \cdot (4x^2 - 4x - 9) \cdot e^{\,x-x^2} > 0$ *Essendo* $e^{\,x-x^2} > 0 \quad \forall x \in R,$ *il segno di* $f^{II}(x)$ *è dato dal prodotto:* $-x \cdot (x-1) \cdot (4x^2 - 4x - 9)$

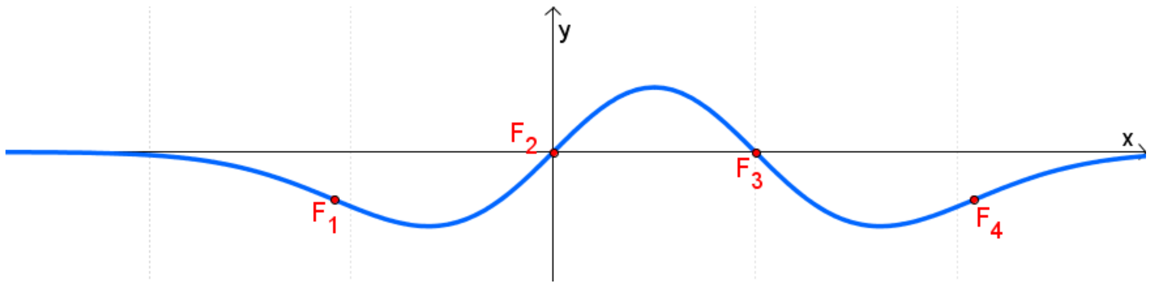
Studiamo i segni dei tre fattori:

$-x > 0 \qquad\qquad x < 0$

$x - 1 > 0 \qquad\quad x > 1$

$4x^2 - 4x - 9 > 0 \qquad x < \frac{1-\sqrt{10}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{1+\sqrt{10}}{2}$



Flessi	*Le ascisse dei punti di flesso sono:* $x = \frac{1-\sqrt{10}}{2} \ , \qquad x = 0\ , \qquad x = 1$
Grafico di $f(x)$	

Per dimostrare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ *è asse di simmetria per il grafico della funzione* $f(x)$ *effettuiamo una traslazione della curva di un tratto* $x = \frac{1}{2}$ *nel verso negativo dell'asse x.*

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y + 0 \end{cases}$ *da cui otteniamo le formule inverse:* $\begin{cases} x = x' + \frac{1}{2} \\ y = y' \end{cases}$

Sostituiamo nell'equazione $\ y = (x - x^2) \cdot e^{\,x-x^2}$

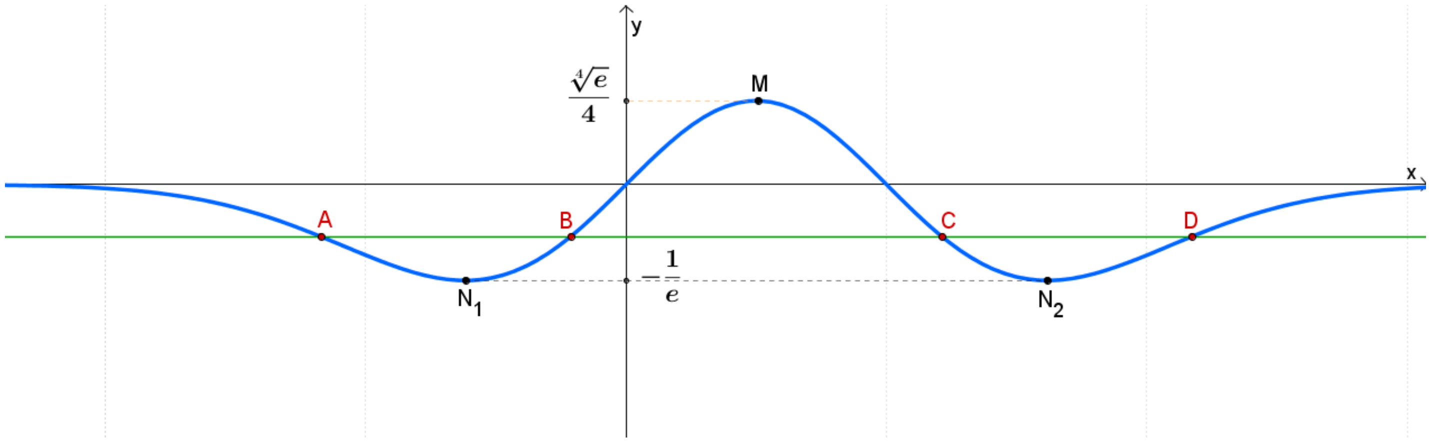
$$y' = \left[x' + \frac{1}{2} - \left(x' + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \cdot e^{\,x' + \frac{1}{2} - \left(x' + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$y' = \left[x' + \frac{1}{2} - \left(x'^2 + \frac{1}{4} + x' \right) \right] \cdot e^{\,x' + \frac{1}{2} - \left(x'^2 + \frac{1}{4} + x'\right)}$$

$$y' = \left[\frac{1}{4} - x'^2 \right] \cdot e^{\frac{1}{4} - x'^2} \,.$$

Questa è l'espressione di una funzione pari (simmetria rispetto all'asse y).

Infatti: $f(-x') \;=\; \left[\frac{1}{4}-(-x')^2\right]\cdot e^{\frac{1}{4}-(-x')^2} \;=\; \left[\frac{1}{4}-x'^2\right]\cdot e^{\frac{1}{4}-x'^2} \;=\; f(x')$.



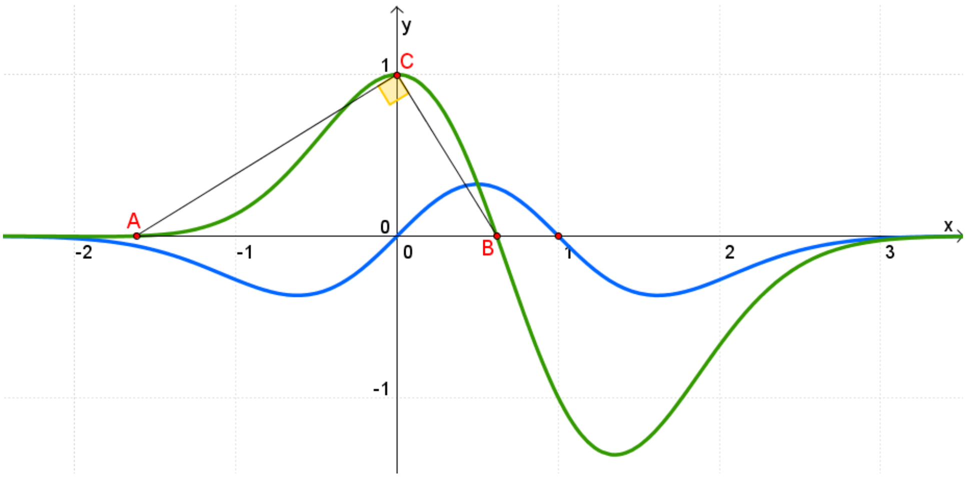
Per determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x)=k$ *al variare di* k*,*
contiamo le intersezioni del grafico di $f(x)$ *con la generica retta orizzontale* $y=k$.

Valore di k	Numero delle soluzioni
$k<-\frac{1}{e}$	*nessuna soluzione*
$k=-\frac{1}{e}$	*2 soluzioni doppie*
$-\frac{1}{e}<k<0$	*4 soluzioni*
$k=0$	*nessuna soluzione*
$0<k<\frac{\sqrt[4]{e}}{4}$	*2 soluzioni*
$k=\frac{\sqrt[4]{e}}{4}$	*2 soluzioni coincidenti*
$k>\frac{\sqrt[4]{e}}{4}$	*nessuna soluzione*

Punto c

Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.

Verifichiamo che : $\frac{1}{\varphi}$ *è uno zero di* $\boldsymbol{g(x) = (-x^2 - x + 1) \cdot e^{(x-x^2)}}$	
Calcoliamo: $\frac{1}{\varphi}$	$\boldsymbol{\frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$
Essendo $e^{x-x^2} \neq 0 \;\; \forall x \in R \qquad g(x) = 0 \;\; se \;\; q(x) = 0 \qquad dove \;\; q(x) = (-x^2 - x + 1)$	
Verifichiamo che $q\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 0$	$q\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = -\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 =$ $= \frac{-6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{-6+2\sqrt{5}-2\cdot(\sqrt{5}-1)+4}{4} =$ $= \frac{-6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+2+4}{4} = \frac{0}{4} = 0\,.$

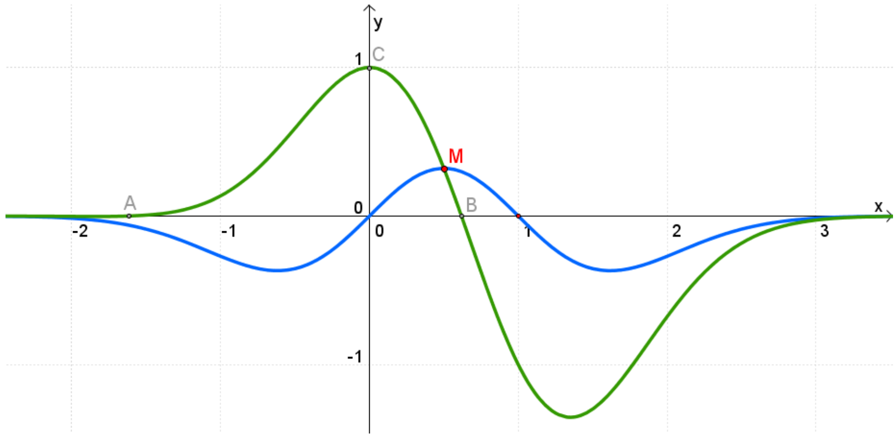


Verifichiamo che il triangolo ABC è rettangolo	
Dal testo del problema: "l'ascissa del punto A è $-\varphi$ *"*	$\boldsymbol{A(-\varphi\,;\,0)}$
Dalla dimostrazione precedente $\frac{1}{\varphi}$ *è l'ascissa del punto B.*	$\boldsymbol{B\left(\frac{1}{\varphi}\,;\,0\right)}$
Dal grafico della traccia del problema:	$\boldsymbol{C(0\,;1)}$
Dal grafico, presumibilmente l'angolo retto è in C. *Calcoliamo quindi il coefficiente angolare della retta AC:*	$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0-1}{-\varphi-0} = \frac{1}{\varphi}$
Calcoliamo il coefficiente angolare della retta BC:	$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0-1}{\frac{1}{\varphi}-0} = \frac{-1}{\frac{1}{\varphi}} = -\varphi\,.$

Essendo il prodotto dei coefficienti angolari $m_{AC} \cdot m_{BC} = \frac{1}{\varphi} \cdot (-\varphi) = -1$

ne segue che le due rette sono tra loro perpendicolari e quindi ABC è un triangolo rettangolo $\left(\hat{C} = 90°\right)$.

Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione fra le due curve γ_1 *e* γ_2 .

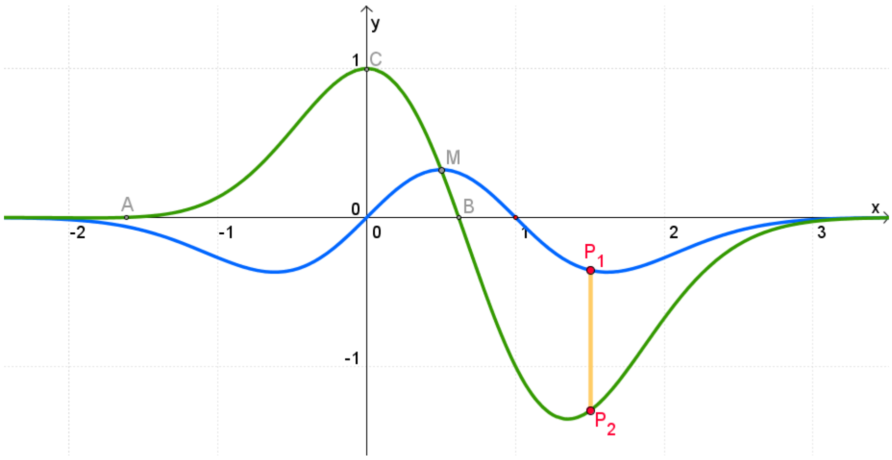


Risolviamo il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$	$\begin{cases} y = (x - x^2) \cdot e^{(x-x^2)} \\ y = (-x^2 - x + 1) \cdot e^{(x-x^2)} \end{cases}$
Sostituiamo l'espressione della prima equazione nella seconda equazione:	$(x - x^2) \cdot e^{(x-x^2)} = (-x^2 - x + 1) \cdot e^{(x-x^2)}$
Dividiamo ambo i membri per $e^{(x-x^2)} \neq 0 \quad \forall x \in R$	$(x - x^2) = (-x^2 - x + 1)$
Determiniamo il valore di x *:*	$2x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$
Sostituiamo il valore trovato nella prima equazione:	$y = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}}$

Le coordinate dell'unico punto di intersezione fra le due curve γ_1 *e* γ_2 *sono:* $\boldsymbol{M\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right)}$.

Punto già trovato in precedenza (massimo assoluto di $f(x)$ *).*

Determiniamo la lunghezza massima del segmento P_1P_2 .



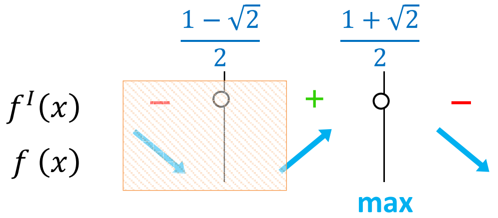
Le coordinate del punto P_1 *sono:*	$P_1\left(x \; ; \; (x-x^2)\cdot e^{(x-x^2)} \right)$
Le coordinate del punto P_2 *sono:*	$P_2\left(x \; ; \; (-x^2-x+1)\cdot e^{(x-x^2)} \right)$
La lunghezza del segmento P_1P_2 *è:*	$\overline{P_1P_2} = \left\| y_{P_1} - y_{P_2} \right\| = \left\| (x-x^2)\cdot e^{(x-x^2)} - (-x^2-x+1)\cdot e^{(x-x^2)} \right\|$
	$\overline{P_1P_2} = \left\| [(x-x^2)-(-x^2-x+1)]\cdot e^{(x-x^2)} \right\|$
	$\overline{P_1P_2} = \left\| (2x-1)\cdot e^{(x-x^2)} \right\|$
Poiché $x \geq \frac{1}{2}$	$2x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|(2x-1)\| = +(2x-1) \quad e \quad \left\| e^{(x-x^2)} \right\| = e^{(x-x^2)}$
La funzione da massimizzare è:	$\boldsymbol{l\,(x) = (2x-1)\cdot e^{(x-x^2)}} \quad in \quad \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
Calcoliamo la derivata prima	$l^I\,(x) = 2\cdot e^{(x-x^2)} + (2x-1)\cdot e^{(x-x^2)}\cdot(1-2x)$
	$l^I\,(x) = [2+(2x-1)\cdot(1-2x)]\cdot e^{(x-x^2)}$
	$l^I\,(x) = (2+2x-4x^2-1+2x)\cdot e^{(x-x^2)}$
	$l^I\,(x) = (-4x^2+4x+1)\cdot e^{(x-x^2)}$
Segno della derivata prima	$(-4x^2+4x+1)\cdot e^{(x-x^2)} > 0$

Essendo $e^{\,x-x^2} > 0 \;\; \forall x \in R$ *il segno è dato dal polinomio* $-4x^2+4x+1$.

$-4x^2+4x+1 > 0 \quad per \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\; 4x^2-4x-1=0\,; \quad \frac{\Delta}{4} = (-2)^2 - 4\cdot(-1) = 8 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{8}}{4} = \frac{2 \mp 2\sqrt{2}}{4} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{array} \;\right]$$

$-4x^2+4x+1 > 0 \quad \Big| \; \frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \Big|$



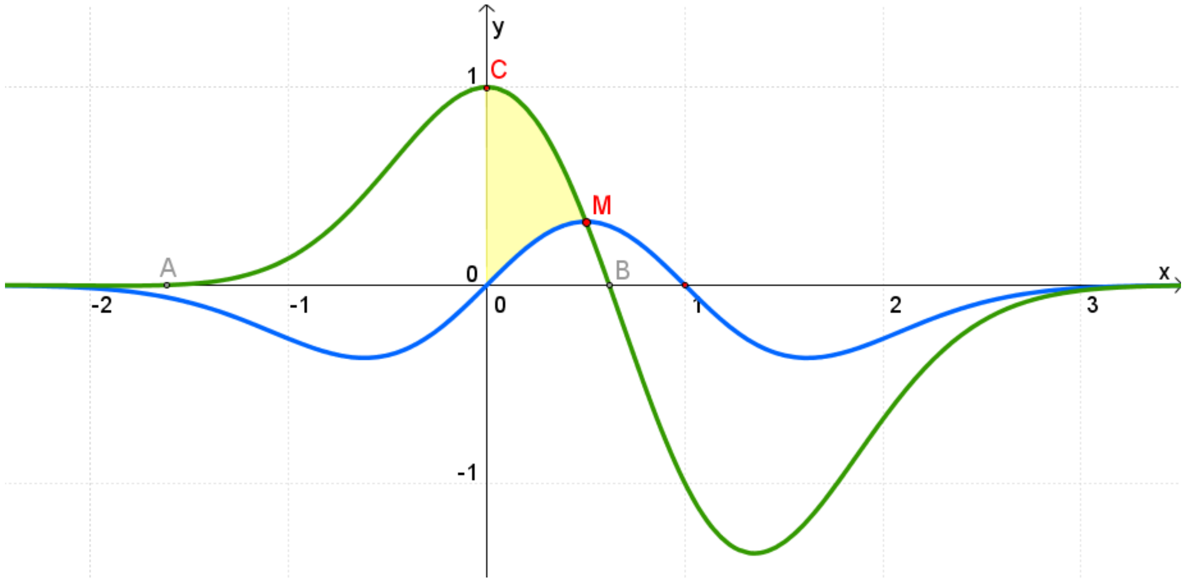
Quindi, la lunghezza massima si ha per	$\boldsymbol{x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

La lunghezza massima è:	$l\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}-1\right)\cdot e^{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)} = \left(1+\sqrt{2}-1\right)\cdot e^{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{1+2+2\sqrt{2}}{4}\right)} =$
	$= \sqrt{2}\cdot e^{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)} = \sqrt{2}\cdot e^{\left(\frac{2+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}}{4}\right)} = \sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e}}}.$

Punto d

Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1, γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R.

Determiniamo l'area della regione limitata R compresa tra γ_1 e γ_2 e l'asse delle ordinate.



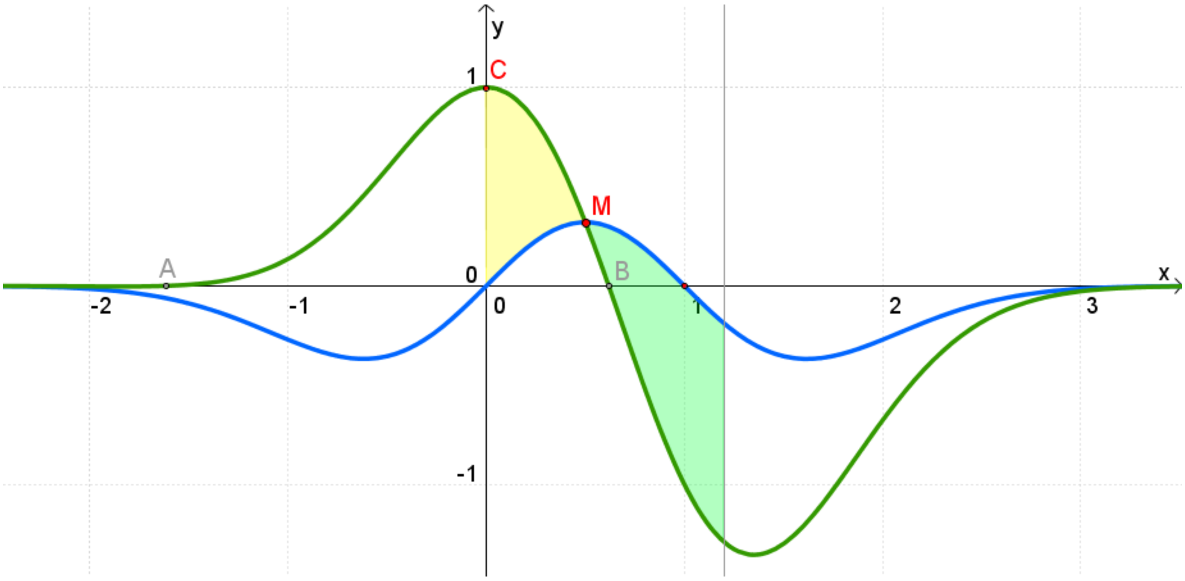
$$S_R = \int_0^{\frac{1}{2}} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(-x^2 - x + 1)\cdot e^{x-x^2} - (x - x^2)\cdot e^{x-x^2}\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [(-x^2 - x + 1) - (x - x^2)]\cdot e^{x-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)\cdot e^{x-x^2}\,dx =$$

L'integrale è del tipo: $\int f^I(x)\cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$

$$S_R = \left[e^{x-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - e^{0-0^2} = e^{\frac{1}{4}} - 1 = \boldsymbol{\sqrt[4]{e} - 1}\,.$$

Determiniamo il valore di t per cui R' equivalente ad R.



Osserviamo che per $x \geq \frac{1}{2}$ *risulta* $f(x) > g(x)$

$$S_{R'} = \int_{\frac{1}{2}}^{t} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{t} \left[(x - x^2) \cdot e^{x - x^2} - (-x^2 - x + 1) \cdot e^{x - x^2}\right] dx =$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} (2x - 1) \cdot e^{x - x^2}\, dx =$$

L'integrale è, a meno del segno meno, del tipo: $\int f^I(x) \cdot e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + C$

$$S_{R'} = \left[-e^{x - x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{t} = -e^{t - t^2} - \left[-e^{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] = \boldsymbol{-e^{t - t^2} + \sqrt[4]{e}} \ .$$

La condizione che occorre che si verifichi è

$\boldsymbol{-e^{t - t^2} + \sqrt[4]{e} = \sqrt[4]{e} - 1}$

$e^{t - t^2} = 1$;

$e^{t - t^2} = e^0$;

$t - t^2 = 0$; $\quad t \cdot (1 - t) = 0 \quad$ $t = 0$ *non accettabile*
$\boldsymbol{t = 1}$ *accettabile*

La soluzione accettabile è $t = 1$ *perché nel testo del problema risulta* $t \geq \frac{1}{2}$.