Problema 1

«La ragione non è nulla senza l'immaginazione» - Cartesio

Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r, di centro l'origine e raggio r, e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

a) Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k. Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k, per opportuni valori di k, un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy, tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .

b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a;\ b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h. Qual è l'espressione analitica di h?

c) Sia A un punto del grafico di g, situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.

d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4 - t^2}\, dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F, dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

Punto a

Esplicitiamo la funzione: $f_k(x) = k \cdot |x| = \begin{cases} +kx & se\ \ x \geq 0 \\ -kx & se\ \ x < 0 \end{cases}$

La funzione $f_k(x)$ *, trattandosi di una funzione polinomiale è continua e derivabile* $\forall x \neq 0$.

Affinché la funzione $f(x)$ *sia continua in* $x = 0$ *occorre che:*

$$\lim_{x\to 0^-} f_k(x) = \lim_{x\to 0^+} f_k(x) = f_k(0) = 0$$

$\lim_{x\to 0^-} -kx = -k \cdot 0 = \mathbf{0}$	$\lim_{x\to 0^+} +kx = +k \cdot 0 = \mathbf{0}$

Pertanto la funzione è continua in $x = 0$.

Affinché la funzione sia derivabile in $x = 0$ *occorre che:* $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$

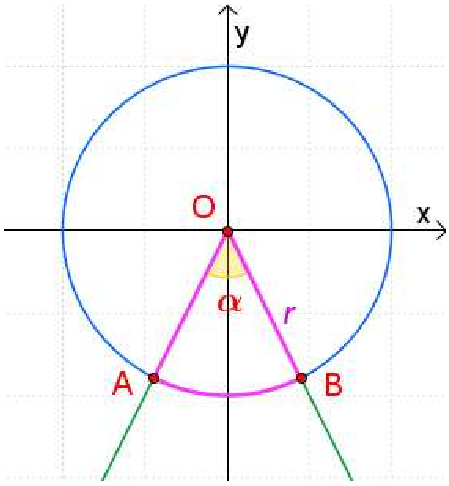
Calcoliamo la derivata prima: $f'_k(x) = \begin{cases} +k & se\ \ x \geq 0 \\ -k & se\ \ x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -k = \boldsymbol{-k}$	$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +k = \boldsymbol{+k}$

Essendo $k < 0 \Rightarrow -k \neq k$ *la funzione* $f_k(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$.

In tale punto $f(x)$ *presenta un punto angoloso.*

L'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio r è : $x^2 + y^2 = r^2$.



Indichiamo con α *l'ampiezza (in radianti) dell'angolo al centro del settore circolare formato dai due rami del grafico di* $f_k(x)$ *e con* l *la lunghezza dell'arco corrispondente.*

L'area del settore circolare è: $S_{settore\ circolare} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot r^2$	*Dalla proporzione:* $S_{settore} : S_{cerchio} = \alpha : 2\pi$ *si ottiene:* $S_{settore} = \frac{\alpha \cdot S_{cerchio}}{2\pi} = \frac{\alpha \cdot \pi\, r^2}{2\pi} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$
La lunghezza dell'arco è: $l_{arco} = \alpha \cdot r$	*Dalla proporzione:* $l : C = \alpha : 2\pi$ *si ottiene:* $l = \frac{C \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{2\pi\, r \cdot \alpha}{2\pi} = \alpha \cdot r$
La lunghezza del contorno del settore circolare è: $l_{contorno} = 2r + \alpha r$	$l_{contorno} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overset{\frown}{AB} = r + r + \alpha \cdot r = 2r + \alpha r$

Le condizioni poste dal quesito sono:

$$\begin{cases} S_{settore\ circolare} = \pi \\ l_{contorno} = 4 + \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \alpha r^2 = \pi \\ 2r + \alpha r = 4 + \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 2r + \frac{2\pi}{r^2} \cdot r = 4 + \pi \end{cases}$$

$$2r + \frac{2\pi}{r} = 4 + \pi \,; \qquad 2r^2 + 2\pi = 4r + \pi r \,; \qquad 2r^2 - (4+\pi)\, r + 2\pi = 0 \,;$$

$$\Delta = (4+\pi)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\pi = 16 + \pi^2 + 8\pi - 16\pi = 16 + \pi^2 - 8\pi = (4-\pi)^2$$

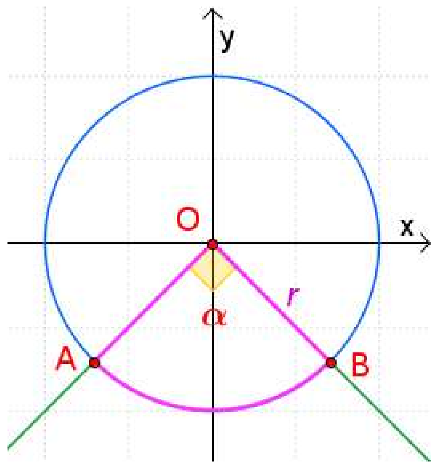
$$r_{1,2} = \frac{4 + \pi \mp \sqrt{(4-\pi)^2}}{2 \cdot 2} = \begin{matrix} r_1 = \frac{4 + \pi - (4-\pi)}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ r_2 = \frac{4 + \pi + (4-\pi)}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{matrix}$$

I grafici di:

$C_2 :\quad x^2 + y^2 = 2^2$

$f_{-1}(x) :\quad y = -|x| = \begin{cases} -1x & se\ x \ge 0 \\ +1x & se\ x < 0 \end{cases}$

sono rappresentati a lato.



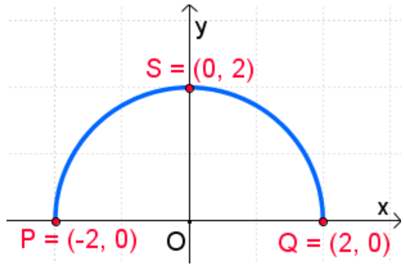
Punto b

Studiare la funzione $g(x)=\sqrt{4-x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a;\, b]$ di ampiezza massima, con $b>0$, nel quale g ammette una funzione inversa h. Qual è l'espressione analitica di h?

Studio della funzione $g(x)=\sqrt{4-x^2}$

Dominio	$D\left(g(x)\right)=[-2,+2]$ $4-x^2\geq 0\,;\quad [\,4-x^2=0\,;\quad x^2=4\,;\quad x=\mp 2\,] \quad\rightarrow\quad -2\leq x\leq +2$
Simmetrie	$g(x)$ *è simmetrica rispetto all'asse y (funzione pari)* $g(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=g(x).$
Intersezione con gli assi	$P(-2;0)\,,\ Q(2;0)\,,\ S(0\,;2)$ $\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=0 \end{cases}\ \begin{cases} 0=\sqrt{4-x^2} \\ y=0 \end{cases}\ \begin{cases} 4-x^2=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P(-2;0) \\ Q(+2;0) \end{matrix} \qquad \begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow S(0\,;2)$
Segno	$g(x)>0 \quad \forall x\in Dominio$ *La radice quadrata è sempre positiva nel suo dominio.*
Comportamento agli estremi del dominio	$g(x)$ *non ha asintoti.* $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0 \qquad \lim\limits_{x\to +2^-}\sqrt{4-x^2}=0$
Derivata prima	$g^I(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad x\neq\mp 2$ $g^I(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
Segno della derivata prima	$g^I(x)>0 \quad in\ (-2\,,0) \quad\rightarrow\quad g(x)\ \ è\ \ crescente\ in\ (-2\,,0)$ $g^I(x)<0 \quad in\ (0\,,+2) \quad\rightarrow\quad g(x)\ \ è\ \ decrescente\ in\ (0\,,+2)$ $\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}>0\,;$ *Essendo* $\sqrt{4-x^2}>0\ \ \forall x\in D$ *il segno è dato dal numeratore* $-x>0\,; \quad x<0\,.$
Max e min	*ha un punto di massimo in* $x=0$
Insieme immagine	$Im\ g(x)=[0\,,2]$ *Essendo* $g(x)$ *continua in* $[-2\,,2]$, *crescente in* $(-2\,,0)$, *decrescente in* $(0\,,+2)$ *e* $g(0)=2$ $Im\ g(x)=[0\,,2]$
Punti di non derivabilità	$g(x)$ *non è derivabile in* $x=-2$ *e in* $x=+2$. $x=-2$ *e* $x=+2$ *sono punti a tangente verticale.* $\lim\limits_{x\to -2^+}g^I(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-(-2)}{0^+}=+\infty\,.$ $\lim\limits_{x\to +2^-}g^I(x)=\lim\limits_{x\to +2^-}\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-(+2)}{0^+}=-\infty\,.$
Derivata seconda	$g^{II}(x)=\dfrac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \qquad x\neq\mp 2$ $g^{II}(x)=\dfrac{-1\cdot\sqrt{4-x^2}-(-x)\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=\dfrac{-\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=\dfrac{\dfrac{-(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=$

	$= \dfrac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$

Segno della Derivata seconda	$g^{II}(x) < 0 \quad \forall x \in D\ g(x) \quad \rightarrow \quad g(x)$ *è concava* $\forall x \in D\ g(x)$. $\dfrac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} > 0$ *Il denominatore è sempre positivo nel dominio di* $g(x)$. *Pertanto il segno è dato dal numeratore:* $-4 > 0$, *ma esso risulta sempre negativo.*
Grafico di $g(x)$	

Dall'equazione della circonferenza C_2 : $\quad x^2 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - x^2$;

$y = \mp\sqrt{4-x^2}$;

Considerando il semipiano $y \geq 0$ *si ricava:* $y = +\sqrt{4-x^2}$ *che è l'espressione della funzione* $g(x)$.

Ricordiamo che:

Se una funzione è monotona in un intervallo (sempre crescente o sempre decrescente), allora la funzione è iniettiva e quindi è invertibile.

Nel nostro caso la funzione $g(x)$ *non è monotona nel suo dominio, quindi* $g(x)$ *non è invertibile.*

L'intervallo $[a\,, b]$ *di ampiezza massima con* $b > 0$ *nel quale la funzione* $g(x)$ *ammette la funzione inversa è l'intervallo* $[0\,, 2]$ *perché in tale intervallo* $g(x)$ *è sempre strettamente decrescente .*

Essendo $g(x)$ *simmetrica rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, la funzione inversa di* $g(x)$ *è se stessa, cioè* $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

La funzione inversa $h(y)$ *poteva anche ottenersi ricavando la x dall'espressione di* $g(x)$:

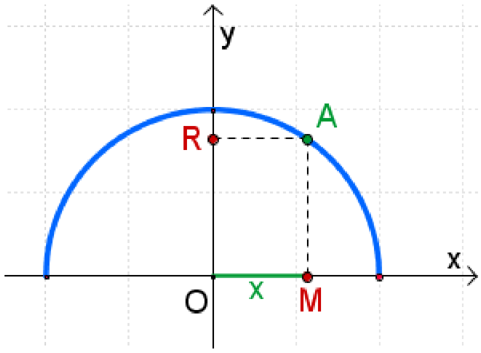
$$\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ x \in [0\,, 2] \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ x \in [0\,, 2] \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 4 - y^2 \\ x \in [0\,, 2] \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{4-y^2} \\ x \in [0\,, 2] \\ y \in [0\,, 2] \end{cases}$$

Punto c

Sia A un punto del grafico di g, situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.

Il punto A ha coordinate $A\left(x\,;\ \sqrt{4-x^2}\right)$

L'area del quadrilatero $AMOR$ *da rendere massima è:* $S = \overline{OM} \cdot \overline{AM}$



$S(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2} \qquad con \quad 0 \le x \le 2$

La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,+2]$ *, per il teorema di Weiestrass ammette massimo.*

$S(0) = 0 \cdot \sqrt{4-0^2} = 0 \qquad\qquad S(2) = 2 \cdot \sqrt{4-2^2} = 0$

Calcoliamo la derivata prima:

$$S'(x) = 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Segno della derivata prima:

$$\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0\,;$$

Essendo il denominatore sempre positivo in $[0,+2]$ *, il segno è dato dal numeratore:*

$4-2x^2 > 0 \quad \left[\,4-2x^2=0\,; \quad 2x^2=4\,; \quad x = \mp\sqrt{2}\,\right] \quad \rightarrow \quad -\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$

Dovendo discutere la disequazione nell'intervallo $[0,+2]$ *si ha che:*

$S'(x) > 0 \quad in \ \left(0\,,\sqrt{2}\right) \quad \rightarrow \quad S(x) \ \text{è crescente in} \ \left(0\,,\sqrt{2}\right)$

$S'(x) < 0 \quad in \ \left(\sqrt{2}\,,2\right) \quad \rightarrow \quad S(x) \ \text{è decrescente in} \ \left(\sqrt{2}\,,2\right).$

Pertanto l'area è massima per $x = \sqrt{2}$ *e vale* $S\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = 2$

$\overline{OM} = \sqrt{2} \qquad \overline{AM} = \sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}.$

Pertanto il quadrilatero $AMOR$ *di area massima è un quadrato.*

Il perimetro del quadrilatero $AMOR$ *da rendere massimo è:* $p = 2 \cdot (\overline{OM} + \overline{AM})$.

$p(x) = 2 \cdot \left(x + \sqrt{4-x^2}\right)$ *con* $0 \le x \le 2$

La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,+2]$,
per il teorema di Weiestrass ammette massimo.

$p(0) = 2 \cdot \left(0 + \sqrt{4-0^2}\right) = 4$ $\qquad$ $p(2) = 2 \cdot \left(2 + \sqrt{4-2^2}\right) = 4$

Calcoliamo la derivata prima:

$$p^I(x) = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x)\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

Segno della derivata prima:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}\right) > 0 \,;$$

Essendo il denominatore sempre positivo in $[0,+2]$, *il segno è dato dal numeratore:*

$$\sqrt{4-x^2} - x > 0$$

$$\sqrt{4-x^2} > x \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x < 0 \\ 4 - x^2 \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 \ge x^2 \end{cases}$$

Dovendo risolvere la disequazione nell'intervallo $[0,+2]$, *il primo sistema viene scartato.*

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - 2x^2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le x \le +\sqrt{2} \end{cases} \qquad 0 \le x \le \sqrt{2}$$

Calcoli: $4 - 2x^2 \ge 0$ $\quad \left[4 - 2x^2 = 0\,; \quad 2x^2 = 4\,; \quad x = \mp\sqrt{2}\,\right] \quad \to \quad -\sqrt{2} \le x \le +\sqrt{2}$

$p^I(x) > 0$ *in* $\left(0\,,\sqrt{2}\right)$ $\to$ $p(x)$ *è crescente in* $\left(0\,,\sqrt{2}\right)$

$p^I(x) < 0$ *in* $\left(\sqrt{2}\,,2\right)$ $\to$ $p(x)$ *è decrescente in* $\left(\sqrt{2}\,,2\right)$.

Pertanto il perimetro è massimo per $x = \sqrt{2}$

e vale $p\left(\sqrt{2}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$.

$\overline{OM} = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\overline{AM} = \sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

Pertanto il quadrilatero $AMOR$ *di perimetro massimo è sempre un quadrato.*

Punto d

Si consideri la funzione $F(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{4-t^2}\,dt$, con $x\in[-2;2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F, dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

$$F(2)=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt \;=\; 2\pi\,.$$

Infatti $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$ *rappresenta l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione* $g(t)=\sqrt{4-t^2}$ *, l'asse delle ascisse e le rette* $t=-2$ *e* $t=+2$ *.*

Essendo il grafico della funzione $g(t)=\sqrt{4-t^2}$ *la semicirconferenza* C_2 *di centro l'origine, raggio* $r=2$ *del semipiano* $y\geq 0$ *si ha:*

$$F(2)=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\,\pi\cdot r^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\pi\cdot 2^2 \;=\; 2\pi\,.$$

Oppure

Calcoliamo l'integrale per sostituzione.

Poniamo $t=2\sin z \quad\rightarrow\quad dt=2\cos z\;dz$

$$z=\arcsin\frac{t}{2}\quad\rightarrow\quad \begin{array}{l} t_1=-2 \quad\rightarrow\quad z_1=\arcsin\frac{-2}{2}=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2} \\ t_2=+2 \quad\rightarrow\quad z_2=\arcsin\frac{+2}{2}=\arcsin(+1)=+\frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$F(2)\;=\;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-(2\sin z)^2}\cdot 2\cos z\;dz \;=\;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 z}\cdot 2\cos z\;dz\;=$$

$$=\;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-\sin^2 z)}\cdot 2\cos z\;dz \;=\;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 z}\cdot 2\cos z\;dz\;=$$

$$=\;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}2\cos z\cdot 2\cos z\;dz \;=\; 4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\;dz\;=$$

Utilizzando la formula di bisezione: $\cos\frac{\alpha}{2}=\mp\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad\rightarrow\quad \cos z=\mp\sqrt{\frac{1+\cos 2z}{2}} \quad\rightarrow\quad \cos^2 z=\frac{1+\cos 2z}{2}$

$$=\;4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2z}{2}\,dz \;=\; 4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2z\right]dz \;=\; 4\cdot\left[\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\;=$$

$$=\;4\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\;=$$

$$=\;4\cdot\left[\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\right)\right]\;=$$

$$=\;4\cdot\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]\;=\;2\pi\,.$$

Per tracciare il grafico di $F(x)$ *facciamo alcune considerazioni.*

$F^I(x) = g(x)$	*per il teorema fondamentale del calcolo integrale.*

$F^I(x) = g(x) \geq 0$ *in* $[-2\,,2]$	$\Rightarrow$	$F(x)$ *è crescente in* $[-2\,,2]$	
$F^{II}(x) = g^I(x) > 0$ *in* $(-2\,,0)$	$\Rightarrow$	$F(x)$ *è convessa in* $(-2\,,0)$	*In* $x = 0$ *c'è un punto di flesso*
$F^{II}(x) = g^I(x) < 0$ *in* $(0\,,+2)$	$\Rightarrow$	$F(x)$ *è concava in* $(0\,,+2)$	

L'equazione della retta tangente nel punto di flesso è data:

$$y - F(0) = F^I(0) \cdot (x - 0)$$

$F^I(0) = g(0) = 2\,.$

$F(0) = \pi$

Infatti:

$F(0) = \int_{-2}^{0} \sqrt{4 - t^2}\, dt$ *rappresenta l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione* $g(t) = \sqrt{4 - t^2}$, *l'asse delle ascisse e le rette* $t = -2$ *e* $t = 0$.

Essendo il grafico della funzione $g(t) = \sqrt{4 - t^2}$ *la semicirconferenza* C_2 *di centro l'origine, raggio* $r = 2$ *del semipiano* $y \geq 0$ *si ha:*

$$F(0) = \int_{-2}^{0} \sqrt{4 - t^2}\, dt \;=\; \frac{1}{4}\,\pi \cdot r^2 \;=\; \frac{1}{4}\,\pi \cdot 2^2 \;=\; \pi\,.$$

Determiniamo quindi l'equazione della retta tangente nel punto di flesso:

$y - F(0) = F^I(0) \cdot (x - 0) \quad \rightarrow \quad y - \pi = 2 \cdot (x - 0) \rightarrow \quad y = 2x + \pi$

Il grafico qualitativo della funzione $F(x)$ *è rappresentato a lato:*