ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2018

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

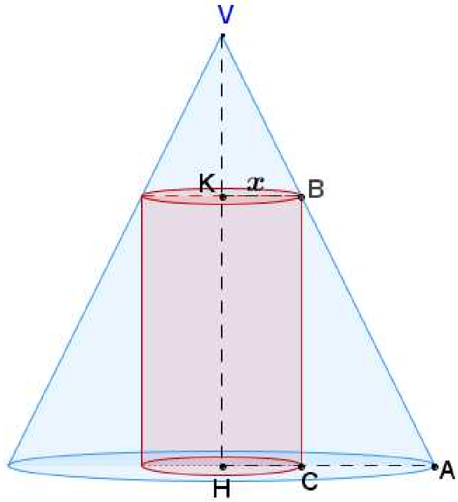
Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE LI15 –
SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Questionario

Quesito 1

Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

<u>*Soluzione*</u>



Risolviamo il quesito considerando un cilindro retto inscritto in un cono retto.

Per il principio di Cavalieri, i volumi di coni e cilindri retti sono uguali ai volumi di coni e cilindri non retti aventi le stesse altezze gli stessi raggi di base.

Consideriamo dunque un cono retto di fissata altezza h e fissato raggio di base r, in cui è inscritto un cilindro retto avente raggio di base x, $(0 < x < r)$ e altezza y $(0 < y < h)$.

Dalla similitudine dei triangoli AVH e ABC si ricava l'altezza y del cilindro:

$VH : BC = AH : AC$; $\qquad h : y = r : (r - x)$;

$y = \frac{h}{r}(r - x) = h - \frac{h}{r}x$.

Il volume del cilindro è dato da:

$$V_{Cilindro} = \pi \cdot x^2 \cdot y = \pi\, x^2 \left(h - \frac{h}{r}x\right) = \pi h x^2 - \pi\, \frac{h}{r}x^3 = \pi h \left(x^2 - \frac{1}{r}x^3\right)$$

Determiniamo quando tale volume è massimo:

$$V'(x) = \pi h \left(2x - \frac{3}{r}x^2\right)$$

$$V'(x) = 0\,; \quad 2x - \frac{3}{r}x^2 = 0\,; \quad x \cdot \left(2 - \frac{3}{r}x\right) = 0\,; \quad \begin{matrix} x = 0 \\ 2 - \frac{3}{r}x = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ 2r - 3x = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{2}{3}r \end{matrix}$$

$V'(x) > 0\,; \qquad 0 < x < \frac{2}{3}r\,.$ $\qquad V'(x) < 0\,; \qquad \frac{2}{3}r < x < r$

Pertanto il volume del cilindro è massimo quando il raggio del cilindro è $x = \frac{2}{3}r$;

mentre l'altezza del cilindro è $y = h - \frac{h}{r}\cdot\frac{2}{3}r = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h$

Il volume di tale cilindro è: $V_{Cilindro\,Max} = \pi \cdot x^2 \cdot y = \pi \cdot \left(\frac{2}{3}r\right)^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{4}{27}\pi\, r^2 h\,.$

Essendo il volume del cono $V_{Cono} = \frac{\pi}{3}r^2 h$, *la tesi è dimostrata perché risulta effettivamente che :*

$$V_{Cilindro} < \frac{1}{2}\,V_{Cono}\,; \qquad \frac{4}{27}\pi\, r^2 h < \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}r^2 h\,; \qquad \frac{4}{27} < \frac{1}{6} \qquad \frac{8}{54} < \frac{9}{54}\,.$$

Quesito 2

Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

Soluzione

Indicando con p la probabilità che esca 4, cioè $p(4) = x$ *, si ottiene:*

$p(3) = 2x$; $p(2) = 4x$; $p(1) = 8x$;

Dovendo risultare: $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$; *si ricava che:* $8x + 4x + 2x + x = 1$; $x = \frac{1}{15}$.

Quindi: $p(4) = \frac{1}{15}$; $p(3) = \frac{2}{15}$; $p(2) = \frac{4}{15}$; $p(1) = \frac{8}{15}$.

Nel lancio contemporaneo di due dadi, gli esiti dei due lanci rappresentano eventi indipendenti.

La probabilità richiesta p*, ovvero la probabilità di uscita di due numeri uguali nel lancio contemporaneo di due dadi, è la somma di eventi incompatibili:*

$$p = p(D_1 = 1 \ \wedge \ D_2 = 1) + p(D_1 = 2 \ \wedge \ D_2 = 2) + p(D_1 = 3 \ \wedge \ D_2 = 3) + p(D_1 = 4 \ \wedge \ D_2 = 4) =$$
$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{8}{15} + \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} + \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} = \frac{64}{225} + \frac{16}{225} + \frac{4}{225} + \frac{1}{225} = \frac{85}{225} = \frac{17}{45} .$$

Quesito 3

Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Soluzione

Affinché due curve di equazioni $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$ *siano tangenti in un punto deve risultare che:*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

cioè le due funzioni devono assumere lo stesso valore nel punto di tangenza e i grafici devono avere la stessa retta tangente.

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5 = -4x + k \\ 3x^2 - 8x = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0 \\ 3x^2 - 8x + 4 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo $3x^2 - 8x + 4 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 16 - 12 = 4 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{3} = \begin{matrix} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0 \\ x_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0 \\ x_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\dfrac{2}{3}\right) + 5 - k = 0 \\ x_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{8}{27} - \dfrac{16}{9} + \dfrac{8}{3} + 5 - k = 0 \\ x_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \dfrac{167}{27} \\ x_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 - k = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 - 16 + 8 + 5 - k = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Pertanto esistono due valori, $k_1 = \frac{167}{27}$ *e* $k_2 = 5$, *per i quali la retta di equazione* $y = -4x + k$ *risulta tangente alla curva di equazione* $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

I punti di tangenza hanno coordinate:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{167}{27} \\ x_1 = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{167}{27} = \frac{95}{27} \quad \Rightarrow \quad T_1 \left(\frac{2}{3} ; \frac{95}{27}\right)$$

$$\begin{cases} k_2 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -4 \cdot 2 + 5 = -3 \quad \Rightarrow \quad T_2\,(2 ; -3) \ .$$

Quesito 4

Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - cos\,x}$ ***, determinare , se esistono , i valori di*** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ***e*** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ***giustificando adeguatamente le risposte.***

Soluzione

La funzione è definita $\forall x \in R$.

Infatti, il denominatore è sempre diverso da zero: $5 + e^{-x} - cos\,x \ \geq\ 5 + e^{-x} - 1 = 4 + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in R$ *mentre il numeratore è definito* $\forall x \in R$. *È quindi lecito calcolare i limiti richiesti:*

Calcoliamo il $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - cos\,x}$

Per $x \to +\infty$ $\quad e^{-1} < e^{sen\,x} < e^{+1}$ *(funzione limitata)* $\Rightarrow$ *il numeratore* $(3x - e^{sen\,x}) \to +\infty$

Per $x \to +\infty$ $\quad 0 < e^{-x} < 1 \quad \wedge \quad -1 < \cos x < +1 \quad \Rightarrow$ *il denominatore* $4 < (5 + e^{-x} - cos\,x) < 7$

Pertanto il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - cos\,x} = +\infty$.

Calcoliamo il $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - cos\,x}$

Per $x \to -\infty$ $\quad e^{-1} < e^{sen\,x} < e^{+1} \quad \Rightarrow$ *il numeratore* $(3x - e^{sen\,x}) \to -\infty$

Per $x \to -\infty$ $\quad e^{-x} \to +\infty \quad \wedge \quad -1 < \cos x < +1 \quad \Rightarrow$ *il denominatore* $(5 + e^{-x} - cos\,x) \to +\infty$

La funzione $f(x)$ *verifica le condizioni del teorema di De l'Hospital e quindi:*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - cos\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - cos\,x \cdot e^{sen\,x}}{-e^{-x} + sen\,x} =$$

Per $x \to -\infty$ $\quad -1 \cdot e^{1} < cos\,x \cdot e^{sen\,x} < +1 \cdot e^{1}$

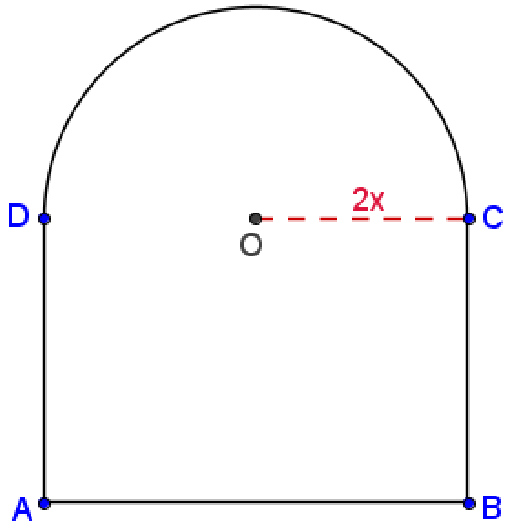
$\Rightarrow$ *il numeratore* $3 - e < (3 - cos\,x \cdot e^{sen\,x}) < 3 + e$

Per $x \to -\infty$ $\quad -e^{-x} \to -\infty \quad \wedge \quad -1 < sen\,x < +1 \quad \Rightarrow$ *il denominatore* $(-e^{-x} + sen\,x) \to -\infty$

Pertanto il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - cos\,x} = 0$.

Quesito 5

Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:
Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.



Soluzione

Poniamo la misura del raggio $\overline{OC} = 2x$ *con* $x > 0$.

Si ottiene: $\overline{AB} = 4x$ *e* $Arco_{CD} = 2\pi x$

$$\overline{BC} = \frac{2 - 2\pi x - 4x}{2} = 1 - \pi x - 2x \,.$$

Anche $\overline{BC} > 0$; $1 - \pi x - 2x > 0$; $x < \frac{1}{\pi+2}$.

Pertanto le limitazioni sono: $0 < x < \frac{1}{\pi+2}$.

L'area della figura mistilinea vale :

$$S\,(x) = \frac{\pi \cdot (2x)^2}{2} + 4x \cdot (1 - \pi x - 2x\,) = 2\pi x^2 + 4x - 4\pi x^2 - 8x^2 = -2(\pi + 4)x^2 + 4x \,.$$

$$S\,(x) = -2(\pi + 4)x^2 + 4x \,.$$

Tale funzione è una funzione quadratica il cui grafico è una parabola con concavità negativa.
Il suo valore massimo si ha in corrispondenza del vertice V della parabola.
L'ascissa del vertice è:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot [-2(\pi + 4)]} = \frac{1}{\pi + 4} \qquad \textit{che rientra nelle limitazioni } 0 < x < \frac{1}{\pi + 2} \,.$$

Pertanto:

$$\overline{AB} = 4x = \frac{4}{\pi + 4}$$

$$\overline{BC} = 1 - \pi x - 2x = 1 - \frac{\pi}{\pi + 4} - \frac{2}{\pi + 4} = \frac{\pi + 4 - \pi - 2}{\pi + 4} = \frac{2}{\pi + 4}.$$

La misura della base è il doppio della misura dll'altezza.

Quesito 6

Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta r: $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} \quad \boldsymbol{t \in R}$

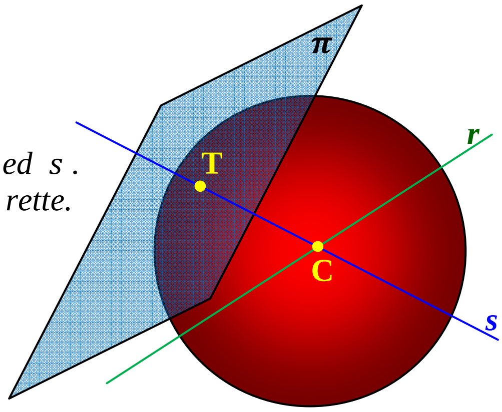
tangente al piano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{3x - y - 2z + 14 = 0}$ ***nel punto*** $\boldsymbol{T\,(-4\,;0\,;1)}$.

<u>*Soluzione 1*</u>

Determiniamo l'equazione della retta s *passante per il punto* $T\,(-4\,;0\,;1)$
e normale al piano π: $3x - y - 2z + 14 = 0$

I coefficienti direttivi di tale retta sono i coefficienti dell'equazione del piano π $\quad (a = 3;\ b = -1;\ c = -2)$.

$$\begin{cases} x = x_T + a\,k \\ y = y_T + b\,k \\ z = z_T + c\,k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = 0 - k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$$



Il centro C *della superficie sferica è il punto in comune alle due rette* r *ed* s.
Occorre pertanto risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

$$\begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -4 + 3k \\ t = -k \\ t = 1 - 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} -k = -4 + 3k \\ - \\ -k = 1 - 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 1 \\ t = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Il centro C *della superficie sferica ha coordinate:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C\,(-1\,;-1\,;-1)$$

La misura del raggio della superficie sferica è data da :

$$r = \overline{CT} = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2 + (z_C - z_T)^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-0)^2 + (-1-1)^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}\,.$$

L'equazione della superficie sferica S *è :*

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$;

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14$;

$x^2 + 1 + 2x + y^2 + 1 + 2y + z^2 + 1 + 2z - 14 = 0$;

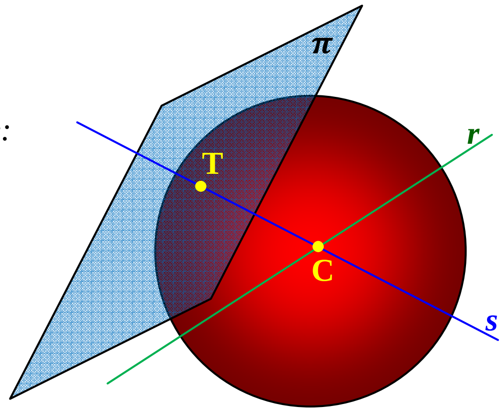
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$.

Soluzione 2

Determiniamo l'equazione della retta s *passante per il punto* $T\left(-4\,;0\,;1\right)$
e normale al piano π: $3x-y-2z+14=0$

I coefficienti direttivi di tale retta sono i coefficienti dell'equazione del piano π $(a=3;\ b=-1;\ c=-2)$.

$$\begin{cases} x=x_T+a\,t \\ y=y_T+b\,t \\ z=z_T+c\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-4+3t \\ y=0-t \\ z=1-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-4+3t \\ y=-t \\ z=1-2t \end{cases}$$



Il centro C *della superficie sferica appartiene alla retta* r *di equazione:*

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$ *quindi le sue coordinate sono del tipo* $C\ (\alpha\,;\alpha\,;\alpha)$.

Ma il punto C *appartiene anche alla retta* s *, quindi le sue coordinate devono soddisfare la sua equazione.*

Si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha=-4+3t \\ \alpha=-t \\ \alpha=1-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} -t=-4+3t \\ \quad - \\ -t=1-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} 4t=4 \\ - \\ t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=1 \\ \alpha=-1 \\ t=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \qquad C\ (-1\,;-1\,;-1)$$

La misura del raggio della superficie sferica è data da :

$$r=\overline{CT}=\sqrt{(x_C-x_T)^2+(y_C-y_T)^2+(z_C-z_T)^2}\ =\ \sqrt{(-1+4)^2+(-1-0)^2+(-1-1)^2}\ =$$
$$=\ \sqrt{9+1+4}\ =\ \sqrt{14}\ .$$

L'equazione della superficie sferica S *è :*

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$;

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14$;

$x^2+1+2x+y^2+1+2y+z^2+1+2z-14=0$;

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0$.

Quesito 7

Determinare a in modo che $\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx = 10$.

<u>*Soluzione*</u>

$$\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx \;=\; [x^3+3x]_a^{a+1} \;=\; (a+1)^3+3(a+1)-(a^3+3a) \;=$$

$$=\; a^3+3a^2+3a+1+3a+3-a^3-3a \;=\; 3a^2+3a+4\,.$$

Deve risultare:

$$\int_a^{a+1}(3x^2+3)\,dx = 10\,; \qquad 3a^2+3a+4=10\,; \qquad 3a^2+3a-6=0\,; \qquad a^2+a-2=0\,;$$

$$\Delta = 1+8=9\,; \qquad a_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \begin{matrix} a_1=-2 \\ a_2=+1 \end{matrix}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili poiché la funzione integranda è un polinomio definito $\forall x \in R$.

Quesito 8

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Soluzione

Siano Antonio e Bruno i due giocatori.

Calcoliamo la probabilità che Antonio vinca il gioco in al più 12 partite.

Antonio potrebbe vincere in :

10 partite	*11 partite*	*12 partite*
Antonio vince le prime 10 partite	*Antonio perde una sola partita tra le prime 10 e vince l'undicesima*	*Antonio perde due partite tra le prime 11 e vince la dodicesima*
$E_1 = (10\ a\ 0)$	$E_2 = (10\ a\ 1)$	$E_3 = (10\ a\ 2)$

La probabilità di vincita di ciascuna partita è costantemente uguale $\frac{1}{2}$,

come pure la probabilità di sconfitta di ciascuna partita è costantemente uguale $\frac{1}{2}$.

Si tratta di un problema di prove ripetute.

La probabilità che Antonio vinca :

in 10 partite	$p\,(E_1) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	
in 11 partite	$p\,(E_2) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \frac{1}{2} = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$	*Evidenziata in giallo la probabilità di vincita dell'undicesima partita.*
in 12 partite	$p\,(E_3) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \frac{1}{2} = \binom{11}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \frac{1}{2} = 11 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$	*Evidenziata in giallo la probabilità di vincita della dodicesima partita.*

Essendo gli eventi E_1 , E_2 , E_3 *incompatibili, la probabilità che Antonio vinca il gioco in al più 12 partite è:*

$$p\,(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p\,(E_1) + p\,(E_2) + p\,(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + 110 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 110 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{110}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \left(1 + 5 + \frac{55}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{4 + 20 + 55}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{79}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} .$$

Similmente, la probabilità che Bruno vinca il gioco in al più 12 partite è anch'essa $p\,(B) = \frac{79}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

In definitiva la probabilità che uno dei due giocatori, Antonio o Bruno, vinca in un numero di partite minore o uguale a 12 è:

$$p = 2 \cdot \frac{79}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{79}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 79 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cong 3{,}857\% .$$

Quesito 9

Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A\,(3\,;1\,;0)$, $B\,(3\,;-1\,;2)$, $C\,(1\,;1\,;2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x+y+z-4=0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare.

Soluzione

Verifichiamo che il triangolo ABC è equilatero :

$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(1+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,.$

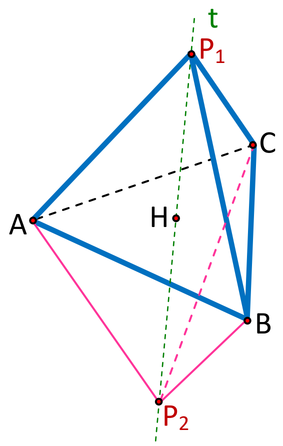
$\overline{BC}=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(z_B-z_C)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,.$

$\overline{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,.$

Verifichiamo che il triangolo ABC è contenuto nel piano α :

Le coordinate dei tre vertici del triangolo ABC verificano l'equazione del piano α:

$3+1+0-4=0\,;\qquad 3-1+2-4=0\,;\qquad 1+1+2-4=0\,.$



I due punti P richiesti appartengono alla retta t passante per il baricentro H del triangolo ABC e perpendicolare al piano del triangolo.

Il baricentro del triangolo ha coordinate:

$H\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,;\,\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\,;\,\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)=\left(\frac{3+3+1}{3}\,;\,\frac{1-1+1}{3}\,;\,\frac{0+2+2}{3}\right)=\left(\frac{7}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right).$

Dall'equazione del piano α: $1\,x+1\,y+1\,z-4=0$, *si ricava la direzione della retta t , data dal vettore* $(a\,;b\,;c)=(1\,;1\,;1)$.

Le equazioni parametriche della retta t sono:

$$\begin{cases}x=x_H+a\,t\\y=y_H+b\,t\\z=z_H+c\,t\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x=\frac{7}{3}+1t\\y=\frac{1}{3}+1t\\z=\frac{4}{3}+1t\end{cases}$$

I due punti P richiesti appartengono alla retta t , pertanto hanno coordinate $P\left(\frac{7}{3}+t\,;\,\frac{1}{3}+t\,;\,\frac{4}{3}+t\right)$.

Affinché ABCP sia un tetraedro regolare, deve risultare: $\overline{AP}=\overline{AB}$;

$\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2+(z_A-z_P)^2}=2\sqrt{2}$;

$\sqrt{\left(3-\frac{7}{3}-t\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}-t\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}-t\right)^2}=2\sqrt{2}$;

$\left(\frac{2-3t}{3}\right)^2+\left(\frac{2-3t}{3}\right)^2+\left(\frac{-4-3t}{3}\right)^2=8$;

$(2-3t)^2+(2-3t)^2+(-4-3t)^2=72$;

$4+9t^2-12t+4+9t^2-12t+16+9t^2+24t-72=0$;

$27t^2-48=0$; $\qquad 9t^2-16=0$; $\qquad \begin{matrix}t_1=-\frac{4}{3}\\ t_2=+\frac{4}{3}\end{matrix}$

Pertanto i punti richiesti hanno coordinate:

$$\begin{matrix} per\ t_1=-\dfrac{4}{3} & & P_1\left(\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3}\right) & & P_1\,(1\,;\,-1\,;\,0)\\ & \Rightarrow & & & \\ per\ t_2=+\dfrac{4}{3} & & P_2\left(\dfrac{7}{3}+\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}\right) & & P_2\left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)\end{matrix}$$

Quesito 10

Determinare quali sono i valori del parametro $k \in R$ per cui la funzione $f(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

<u>*Soluzione*</u>

Determiniamo le derivate prima e seconda della funzione $f(x) = 2e^{kx+2}$ *:*

$f'(x) = 2k\, e^{kx+2}$ $\qquad$ $f''(x) = 2k^2\, e^{kx+2}$

Sostituendo nell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$ *si ottiene:*

$2k^2\, e^{kx+2} - 2 \cdot 2k\, e^{kx+2} - 3 \cdot 2e^{kx+2} = 0$;

$2e^{kx+2} \cdot (k^2 - 2k - 3) = 0$; $\qquad$ $\begin{array}{ll} 2e^{kx+2} = 0 & \nexists\, k \in R \\ k^2 - 2k - 3 = 0 & k_1 = -1 \quad \wedge \quad k_2 = +3 \end{array}$