ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2018

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE LI15 –
SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Problema 2

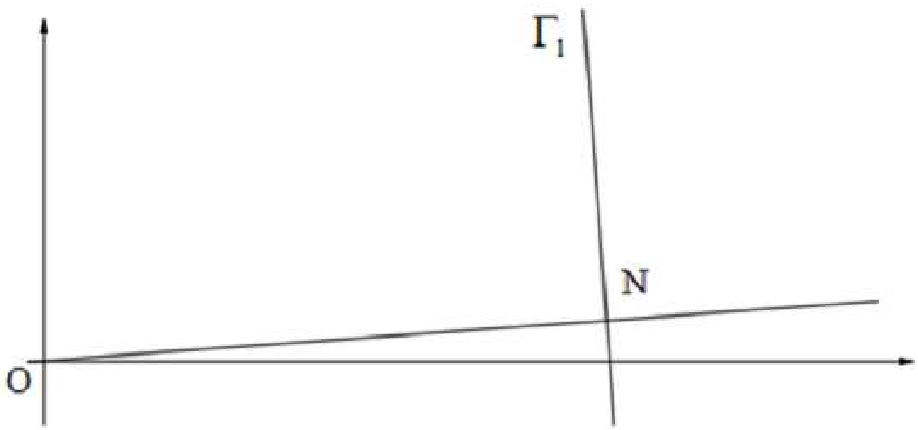
Consideriamo la funzione $f_k : \Re \to \Re$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in Z$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

COPIA CONFORME AGLI ATTI MIUR



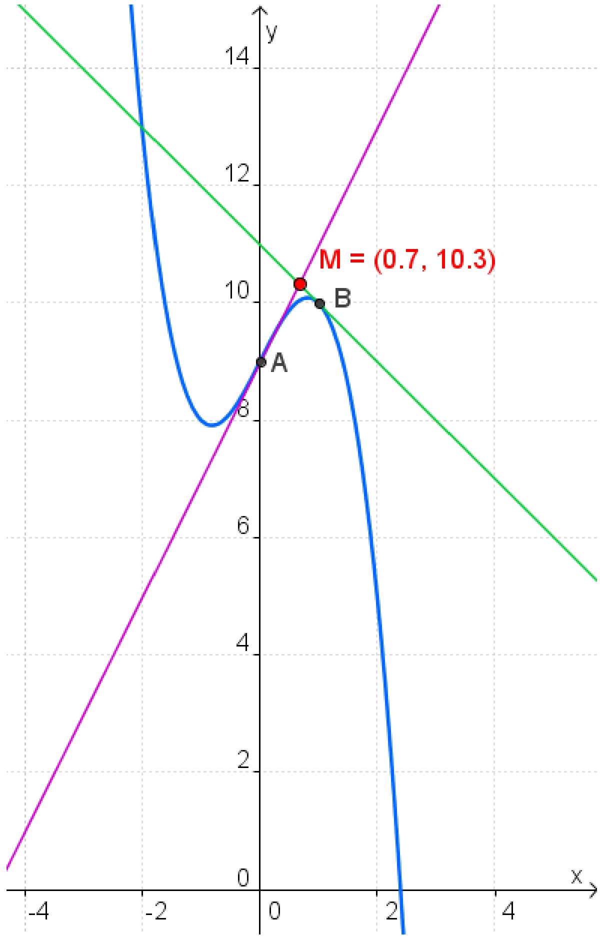
Punto 1

Il punto di Γ_k *di ascissa 0 ha ordinata* $f_k(0) = 9$; $\Rightarrow$ $A\ (0; 9)$.

Il fascio di rette passanti per $A\ (0; 9)$ *ha equazione:* $y = mx + 9$.

Il coefficiente angolare della retta r_k *tangente a* Γ_k *nel punto* A *è* $m_{r_k} = f'(0) = k$.

La retta r_k *tangente a* Γ_k *nel punto A ha equazione* $y = kx + 9$.



Il punto di Γ_k *di ascissa 1 ha ordinata* $f_k(1) = k + 8$;

$\Rightarrow$ $B\ (1; k + 8)$

Il fascio di rette passanti per $B\ (1; k + 8)$ *ha equazione:* $y - (k + 8) = m(x - 1)$; $y = mx - m + k + 8$.

Il coefficiente angolare della retta s_k *tangente a* Γ_k *nel punto B è :*

$m_{s_k} = f'(1) = (-3x^2 + k)_{x=1} = -3 + k$.

La retta s_k *tangente a* Γ_k *nel punto B ha equazione :*

$y = (-3 + k)x - 3 + k + k + 8$;

$y = (-3 + k)x + 11$;

Determiniamo le intersezioni fra le due rette tangenti:

$\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (-3 + k)x + 11 \end{cases}$ $\begin{cases} (-3 + k)x + 11 = kx + 9 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} -3x = -2 \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3}k + 9 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $M\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}k + 9\right)$.

Da tale soluzione si ricava che per qualsiasi valore di k l'ascissa del punto M è sempre $\frac{2}{3}$ *(non dipende dal valore di k).*

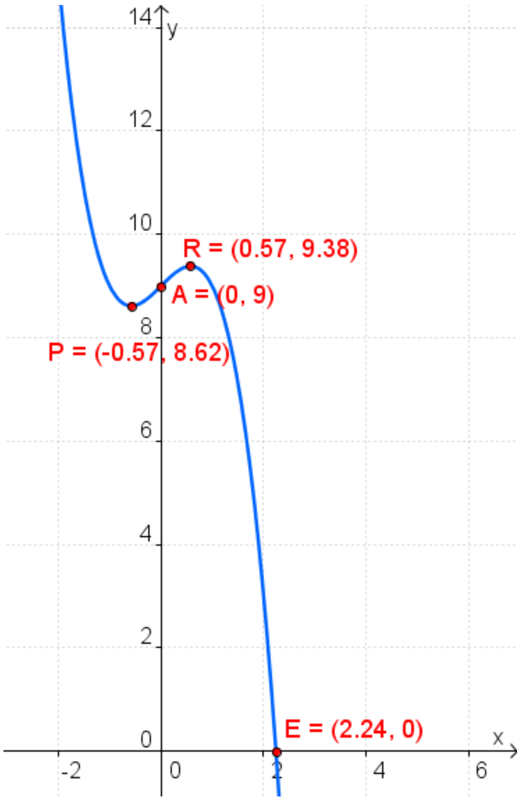
Punto 2

L'ordinata del punto M è minore di 10 per:

$$\frac{2}{3}k+9<10\,; \qquad \frac{2}{3}k+9<10\,; \qquad 2k+27<30\,; \qquad 2k<3\,; \qquad k<\frac{3}{2}\,.$$

Quindi $k=1$ *è il massimo valore intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di* 10 .

Studiamo il grafico di $f_1(x)=-x^3+x+9$



Si tratta di una cubica, funzione continua e derivabile in tutto R.

La funzione non è ne pari ne dispari.

Interseca l'asse y nel punto $A\,(0\,;9)$

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^3+x+9)=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}(-x^3+x+9)=+\infty$$

Quindi non esistono ne massimi ne minimi assoluti.

$$f'(x)=-3x^2+1$$

$$f'(x)=0\,; \qquad -3x^2+1=0\,; \qquad x_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{1}{3}}=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

$$f'(x)>0\,; \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<+\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

$$f'(x)<0\,; \qquad x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x>+\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

In $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ *c'è un punto di minimo relativo*

$\Rightarrow \quad P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\,8{,}6\right).$

In $x_2=+\frac{\sqrt{3}}{3}$ *c'è un punto di massimo relativo*

$R\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,9{,}4\right).$

$$f''(x)=-6x$$

$$f''(x)=0\,; \quad x=0\,.$$

$f''(x)>0\,; \quad x<0\,; \qquad f''(x)<0\,; \quad x>0 \qquad \Rightarrow \qquad A\,(0;9)$ *è un punto di flesso.*

La curva passa per i punti di minimo e massimo relativi $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};8{,}6\right)$ *e* $R\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,9{,}4\right)$ *entrambi con ordinata positiva, è decrescente in* $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,,+\infty\right)$, *quindi incontrerà l'asse x in un punto di ascissa* $x>+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Per determinare l'intersezione della curva con l'asse delle x applichiamo il metodo di bisezione:

$$f_1(x)=-x^3+x+9$$

x_1	x_2	x_m	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_M)$	Δx
2	3	2,5	3	-15	-4	1
2	2,500	2,250	3	-4	-0,14	0,5
2	2,250	2,125	3	0	1,53	0,25
2,1250	2,250	2,188	2	0	0,72	0,125
2,1875	2,250	2,219	1	0	0,30	0,0625
2,2188	2,250	2,234	0	0	0,08	0,0313
2,2344	2,250	2,242	0	0	-0,03	0,0156
2,2344	2,242	2,238	0	0	0,02	0,0078
2,2383	2,242	2,240	0	0	0,00	0,0039

La curva interseca l'asse delle x nel punto $E\,(2{,}24\,;\,0)$.

La probabilità richiesta è il rapporto fra l'area della zona bianca del triangolo CDM e l'area del triangolo CDM.

L'area del triangolo CDM è $S_{CDM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot y_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{2} \cdot \frac{29}{3} = \frac{841}{12}$.

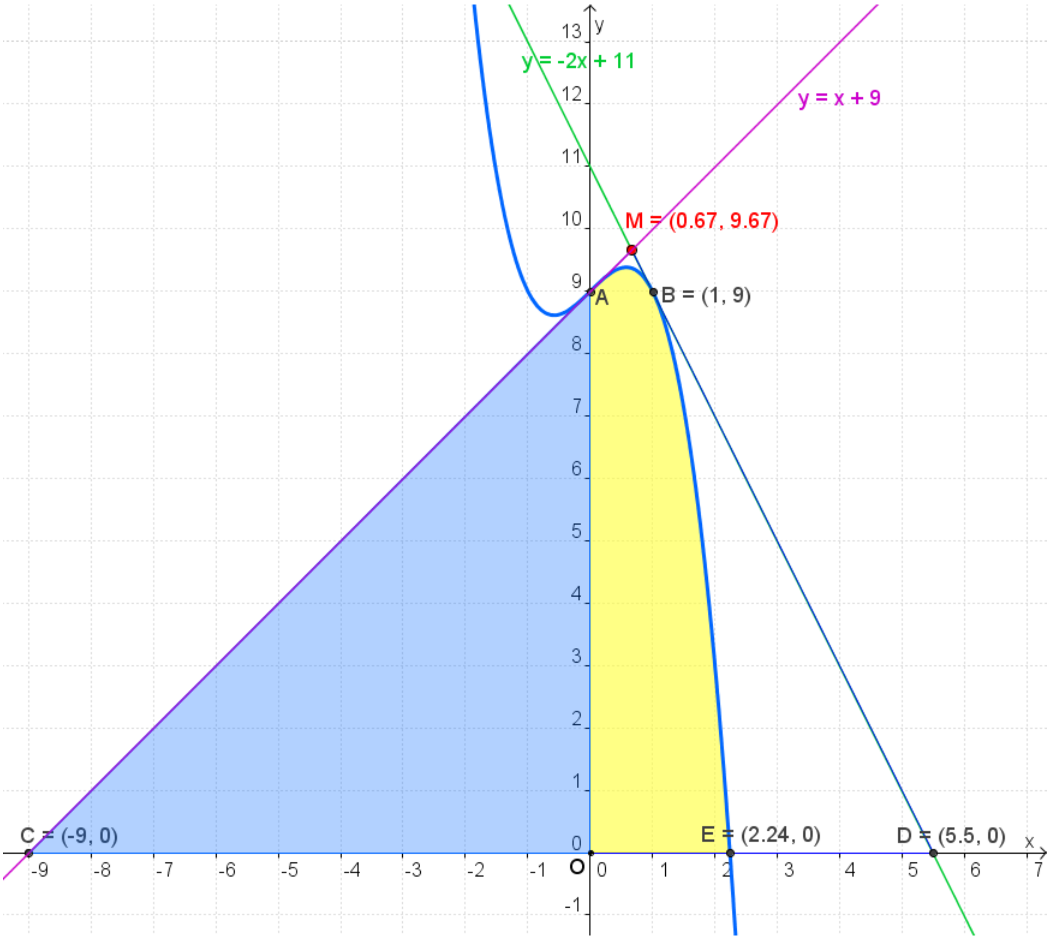
L'area del triangolo azzurro ACO è $S_{ACO} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CO} \cdot \overline{AO} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 = \frac{81}{2}$.

L'area della regione gialla delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani è:

$$S = \int_0^{2,24} (-x^3 + x + 9)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 9x \right]_0^{2,24} = \left(-\frac{2,24^4}{4} + \frac{2,24^2}{2} + 9 \cdot 2,24 \right) - (0) = 16,375$$

Pertanto la probabilità richiesta è:

$$p = \frac{S_{CDM} - S_{ACO} - S}{S_{CDM}} = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16,375}{\frac{841}{12}} = 0,1885 \cong 18,85\% \,.$$



Punto 4

Sia $p(x)$ *un polinomio di grado* n *e sia* $P\left(x_0\,;p(x_0)\right)$ *un generico punto del grafico della funzione polinomiale* $y = p(x)$

L'equazione della retta tangente t *al grafico di* $p(x)$ *nel punto* P *ha equazione:*

$y - p(x_0) = m_t \cdot (x - x_0)$; $\qquad$ $y - p(x_0) = p'(x_0) \cdot (x - x_0)$;

L'equazione della retta normale n *al grafico di* $p(x)$ *nel punto* P *ha equazione:*

$$y - p(x_0) = -\frac{1}{p'(x_0)} \cdot (x - x_0) \; .$$

Imponiamo il passaggio per l'origine degli assi cartesiani:

$$y - p(x_0) = -\frac{1}{p'(x_0)} \cdot (x - x_0) \; ; \qquad 0 - p(x_0) = -\frac{1}{p'(x_0)} \cdot (0 - x_0) \; ; \qquad p(x_0) = -\frac{x_0}{p'(x_0)} \; ;$$

Essendo, dal grafico della traccia, $p'(x_0) \neq 0$ *si ottiene:*

$p(x_0) \cdot p'(x_0) + x_0 = 0$;

Essendo il grado del polinomio $p(x_0)$ *uguale a* n *ed essendo il grado del polinomio* $p'(x_0)$ *uguale a* $n - 1$,

il grado del polinomio $p(x_0) \cdot p'(x_0) + x_0$ *è* $n + (n - 1) = 2n - 1$.

Pertanto, per il "Teorema Fondamentale dell'algebra", l'equazione $p(x_0) \cdot p'(x_0) + x_0 = 0$ *ha al massimo* $2n - 1$ *radici.*

Si conclude che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ *non può possedere più di* $2n - 1$ *punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.*